RECHERCHES SUR UNE CLASSE

DE

FONCTIONS MÉROMORPHES

PAR

DR. NIELS NIELSEN,

INSPECTEUR DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE SECONDAIRE

D. KGL. DANSKE VIDENSK. SELSK. SKRIFTER, 7. RÆKKE, NATURVIDENSK. OG MATHEM AFD. II. 2

KØBENHAVN

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1904

Introduction.

Dans le présent Mémoire nous aurons à étudier les intégrales définies de la forme

$$\mathfrak{G}(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1}\,dt,$$

où $\varphi(t)$, que nous désignons avec LAPLACE et ABEL comme *la fonction génératrice de la fonction* $\mathfrak{G}(x)$, doit être holomorphe aux environs du point $t = 0$, de sorte que la série de puissances correspondante

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots.$$

a son rayon de convergence égal à un au moins.

Nous désignons constamment par $\mathfrak{G}(x)$ une intégrale dont la fonction génératrice satisfait aux conditions susdites.

Supposons ensuite que nous ayons des valeurs limites de la forme

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases},$$

selon que $\alpha \gtrless \lambda$, nous désignons λ comme *l'ordre du coefficient* a_n ou comme *l'indice de la fonction* $\mathfrak{G}(x)$. Dans ce qui suit nous avons à étudier seulement les fonctions $\mathfrak{G}(x)$ à indice *fini*; c'est-à-dire fonctions dont l'indice λ ne dépasse pas une certaine quantité positive et finie.

Le but principal de nos recherches suivantes sera de développer les fonctions $\mathfrak{G}(x)$ à indice fini dans une série de cette forme:

$$\mathfrak{F}_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{n!\,A_{s,n}}{(x+s)(x+s+1)\,\dots\,(x+s+n)},$$

où les coefficients $A_{s,n}$ doivent être indépendants de x, et où n doit être égal à zéro ou à un positif entier déterminé. Dans ce qui suit nous désignons constamment par $\mathfrak{F}_n(x)$ une série convergente de la forme susdite, mais nous écrivons toujours $\mathfrak{F}(x)$ au lieu de $\mathfrak{F}_0(x)$.

L'ordre du coefficient $A_{s,n}$ est à définir à l'aide des valeurs limites analogues à celles appliquées dans la définition de l'ordre de a_n; il est évident que l'ordre de $A_{s,n}$ doit toujours être *fini*.

Les intégrales définies de la même forme que $\mathfrak{G}(x)$, mais dont la fonction génératrice $\varphi(t)$ satisfait à d'autres conditions, jouent un rôle fondamental dans plusieurs mémoires récents de M. PINCHERLE[1]) et de moi[2]) concernant pour la plupart la théorie des séries de factorielles.

Or, comme il fallait s'y attendre, les recherches suivantes sur la fonction $\mathfrak{G}(x)$ nous conduiront à des résultats très intéressants, à la fois au point de vue de la théorie générale des fonctions analytiques, par exemple concernant leur développement en séries infinies et leur intégration finie, et au point de vue plus particulier de la théorie de la fonction gamma.

I.

Propriétés fondamentales d'une série $\mathfrak{F}_n(x)$.

§ 1. Convergence uniforme de $\mathfrak{F}_n(x)$.

En développant les principes d'une théorie des séries de la forme

$$\mathfrak{F}_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{n!\, A_{s,n}}{(x+s)(x+s+1)\ \ldots\ (x+s+n)}, \tag{1}$$

où les coefficients $A_{s,n}$ sont indépendants de x, et où n désigne un entier fini non négatif, nous avons tout d'abord à démontrer ce théorème fondamental:

Désignons par $\mathfrak{A}$ l'ensemble de tous les points non infiniment éloignés du plan des x à l'exception des points isolés $0, -1, -2, -3, \ldots$, *puis supposons convergente la série $\mathfrak{F}_n(x)$, alors cette série sera uniformément convergente dans tout le domaine $\mathfrak{A}$; de plus, la convergence est toujours ou absolue ou non. Dans les points susdits exclus la fonction $\mathfrak{F}_n(x)$ a des pôles simples.*

Quant à la démonstration de la convergence uniforme de $\mathfrak{F}_n(x)$, supposons que $\mathfrak{F}_n(\alpha)$ soit convergente, où α est une quantité finie, puis désignons par x un autre nombre fini différent de zéro et les négatifs entiers; je dis que la série $\mathfrak{F}_n(x)$ sera également convergente.

[1]) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei 1902, p. 139, p. 417; 8 novembre 1903. Rendiconti delle Reale Accademia di Bologna 29 novembre 1903.

[2]) Comptes rendus 30 décembre 1901 et 20 janvier 1902. Annales de l'École Normale (3), t. 19; 1902. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei 17 janvier 1904. Ann. de l'Éc. Norm. (sous presse). Math. Ann. (sous presse).

En effet, considérons, en dehors de $\mathfrak{F}_n(\alpha)$ et $\mathfrak{F}_n(x)$, les n séries auxiliaires, dont les termes généraux ont les dénominateurs suivants:

$$(x+s)(\alpha+s+1)(\alpha+s+2) \ldots . (\alpha+s+n-1)(\alpha+s+n)$$
$$(x+s)(x+s+1)(\alpha+s+2) \ldots . (\alpha+s+n-1)(\alpha+s+n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x+s)(x+s+1)(x+s+2) \ldots . (x+s+n-1)(\alpha+s+n);$$

combinons maintenant la première des ces séries auxiliaires avec $\mathfrak{F}_n(x)$, puis chacune des autres avec la précédente et enfin la dernière avec $\mathfrak{F}_n(x)$, nous avons évidemment toujours à comparer deux séries de cette forme:

$$S = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{b_s}{\alpha+s}, \quad S_1 = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{b_s}{x+s};$$

d'où, en soustrayant,

$$S - S_1 = (x-\alpha) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{b_s}{\alpha+s} \cdot \frac{1}{x+s}. \tag{α}$$

Posons ensuite

$$x = \xi + i\eta$$
$$\frac{b_s}{\alpha+s} = A_s + iB_s,$$

où A_s, B_s, ξ et η sont des quantités réelles, nous aurons évidemment:

$$\frac{1}{x+s} = \frac{\xi+s-i\eta}{(\xi+s)^2+\eta^2} = \xi_s - i\eta_s,$$

où les quantités réelles ξ_s et η_s, pour des valeurs suffisamment grandes de s, satisfont aux inégalités:

$$1 > \xi_s > \xi_{s+1}, \qquad |\eta_{s+1}| < |\eta_s|; \tag{β}$$

de plus, tous les composants η_s sont du même signe.

Cela posé, nous aurons évidemment:

$$S - S_1 = (x-\alpha) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} [A_s\xi_s + B_s\eta_s - iA_s\eta_s + iB_s\xi_s];$$

or, remarquons que les deux séries infinies

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} A_s, \quad \sum_{s=0}^{s=\infty} B_s$$

sont convergentes toutes les deux; les inégalités (β) montreront clairement, en vertu d'une proposition fondamentale due à Abel[1]), que les quatre séries infinies

[1]) U. Dini: Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer reellen veränderlichen Grösse, p. 134. 135; Leipzig 1892.

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} A_s \xi_s, \quad \sum_{s=0}^{s=\infty} A_s \eta_s, \quad \sum_{s=0}^{s=\infty} B_s \xi_s, \quad \sum_{s=0}^{s=\infty} B_s \eta_s,$$

sont convergentes aussi; c'est-à-dire que $\mathfrak{F}_n(x)$ est certainement convergente, pourvu que $\mathfrak{F}_n(a)$ le soit.

De plus, l'équation (α) nous montre que $\mathfrak{F}_n(x)$ est absolument convergente ou non, selon que $\mathfrak{F}_n(a)$ l'est ou ne l'est pas, et vice versa; or, telle est la démonstration complète du théorème énoncé ci-dessus.

Supposons que l'ordre λ du coefficient $A_{s,n}$ soit de la forme $\lambda = 1 - \varepsilon$, où ε désigne une quantité positive aussi petite qu'on le veut mais d'une grandeur assignable, la série (α) sera absolument convergente; mais cela n'est pas vrai, si nous avons par exemple, pour $s > 1$,

$$A_{s,n} = \frac{(-1)^s (s+1)(s+2) \ldots . (s+n+1)}{\log s};$$

dans ce cas $\mathfrak{F}_n(1)$ est convergente, tandis que la série (α) n'est pas absolument convergente. C'est pourquoi nous avons appliqué la démonstration précédente, beaucoup plus générale.

Remarquons maintenant que la série obtenue en différentiant terme à terme la série $\mathfrak{F}_n(x)$ est uniformément convergente aussi dans le domaine $\mathfrak{A}$; cette série nouvelle représente certainement[1]) la dérivée de $\mathfrak{F}_n(x)$, ou, ce qui revient au même, $\mathfrak{F}_n(x)$ est holomorphe dans tout le domaine $\mathfrak{A}$; c'est-à-dire que nous avons démontré cette proposition remarquable:

Les séries $\mathfrak{F}_n(x)$ peuvent nous fournir des exemples d'une série infinie uniformément convergente, dont la somme est toujours une fonction holomorphe de x, quoique la série ne puisse jamais être absolument convergente.

Pour illustrer par un exemple ce fait intéressant révoqué en doute ou même nié par des géomètres distingués, posons:

$$\mathfrak{F}_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(s+1)(s+2) \ldots . (s+n)}{(x+s)(x+n) \ldots . (x+s+n)} \cdot \cos(sv),$$

où v désigne un angle réel non égal à un multiple de 2π; il est bien connu que la série $\mathfrak{F}_n(1)$ n'est pas absolument convergente.

§ 2. Expression intégrale de $\mathfrak{F}_n(x)$.

Revenons maintenant à notre série générale $\mathfrak{F}_n(x)$, puis posons:

$$\varphi_n(t) = A_{0,n} + A_{1,n} t + A_{2,n} t^2 + A_{3,n} t^3 + \ldots, \tag{2}$$

cette série de puissances a évidemment son rayon de convergence égal à l'unité au

[1]) U. Dini: Grundlagen etc. p. 150.

moins. Appliquons ensuite la définition intégrale de la fonction beta, nous verrons que cette autre série infinie

$$\varphi_n(t)(1-t)^n = \sum_{s=0}^{s=\infty} A_{s,n} \cdot t^s (1-t)^n \tag{2 bis}$$

sera intégrable terme à terme de $t=0$ à $t=1$, parce que $\mathfrak{F}_n(1)$ est convergente [1], ce qui donnera cette formule générale:

$$\mathfrak{F}_n(x) = \int_0^1 \varphi_n(t)(1-t)^n t^{x-1} dt, \tag{3}$$

où il faut admettre généralement $\Re(x) > 0$; c'est-à-dire que nous avons démontré ce théorème général:

Les intégrales (3), *où la fonction* $\varphi_n(t)$ *satisfait aux conditions susdites, sont les seules fonctions développables dans une série* $\mathfrak{F}_n(x)$; *inversement toutes ces fonctions sont développables aussi.*

Comme corollaire de ce théorème, nous aurons la proposition suivante qui d'ailleurs est aussi une conséquence immédiate d'un théorème de M. Lerch [2]:

Supposons développable en série $\mathfrak{F}_n(x)$ *une fonction donnée, ce développement ne peut être établi que d'une seule façon.*

Posons par exemple

$$\varphi_n(t) = (1-t)^{p-n},$$

où p désigne un positif entier, nous aurons pour $p < n$

$$\frac{1}{x(x+1)\dots(x+p)} = \binom{n}{p} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(s+1)(s+2)\dots(s+n-p-1)}{(x+s)(x+s+1)\dots(x+s+n)}, \tag{4}$$

dans le cas particulier $n = p+1$, le numérateur du terme sommatoire au second membre doit être égal à un; cette formule particulière appartient à Stirling.

Supposons maintenant $p \geqq n$, nous aurons au contraire cette série finie:

$$\frac{p!}{x(x+1)\dots(x+p)} = n! \sum_{s=0}^{s=p-n} \frac{(-1)^s \binom{p-n}{s}}{(x+s)(x+s+1)\dots(x+s+n)}. \tag{4 bis}$$

La formule obtenue de (4) en y mettant $p=0$ nous conduira à une transformation intéressante de cette fonction célèbre de Gauss:

$$\Psi(x) = -C + \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s}\right) = D_x \log \Gamma(x), \tag{5}$$

où C désigne la constante d'Euler. Nous aurons en effet pour $\Psi(x)$ cette autre expression que je crois nouvelle:

[1]) U. Dini: Grundlagen etc. p. 521.

[2]) Acta Mathematica, t. 27, p. 347; 1903.

$$\Psi(x) = -C + \sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\frac{1}{s+n+1} - \frac{(s+1)(s+2)\ldots\ldots(s+n)}{(x+s)(x+s+1)\ldots\ldots(x+s+n)}\right), \tag{6}$$

où n désigne un positif entier fini quelconque.

Quant à la démonstration de (6), désignons par $f_0(x)$ le second membre de (5), mais par $f_n(x)$ celui de (6), nous aurons pour $s = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$, en vertu du cas particulier susdit de (4), l'identité suivante:

$$f_{s+1}(x) - f_s(x) = 0,$$

et voilà la démonstration complète de (6).

§ 3. Sur la multiplication de deux séries $\mathfrak{F}(x)$.

Pour étudier le produit des deux séries

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s}{x+s}, \quad \mathfrak{F}'(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{b_s}{x+s} \text{ [1]}$$

considérons tout d'abord ce produit particulier:

$$\frac{b_n}{x+n} \cdot \mathfrak{F}(x);$$

l'identité évidente

$$\frac{1}{x+n} \cdot \frac{1}{x+p} = \frac{1}{n-p}\left(\frac{1}{x+p} - \frac{1}{x+n}\right)$$

nous conduira sans peine à une formule de la forme suivante:

$$\frac{b_n}{x+n} \cdot \mathfrak{F}(x) = \frac{a_n b_n}{(x+n)^2} - \sum_{s=0}^{s=\infty}{}' \frac{b_n}{s-n} \cdot \frac{a_s}{x+s} + \frac{b_n}{x+n} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty}{}' \frac{a_s}{s-n},$$

où les accents apposés aux signes de sommation indiquent qu'il faut supprimer dans les deux séries infinies figurant au second membre les termes qui correspondent à $s = n$.

Cela posé, mettons pour abréger:

$$\mathfrak{F}_n = \lim_{x=-n}\left(\mathfrak{F}(x) - \frac{a_n}{x+n}\right)$$

$$\mathfrak{F}'_n = \lim_{x=-n}\left(\mathfrak{F}'(x) - \frac{b_n}{x+n}\right),$$

notre formule précédente se présente aussi sous cette forme plus élégante:

$$\frac{b_n}{x+n} \cdot \mathfrak{F}(x) = \frac{a_n b_n}{(x+n)^2} - \sum_{s=0}^{s=\infty}{}' \frac{b_n}{s-n} \cdot \frac{a_s}{x+s} + \frac{b_n \mathfrak{F}_n}{x+n},$$

[1] Naturellement $\mathfrak{F}'(x)$ ne désigne pas la dérivée de $\mathfrak{F}(x)$, fonction que nous désignons constamment par $\mathfrak{F}^{(1)}(x)$.

d'où finalement:

$$\mathfrak{F}(x)\cdot\mathfrak{F}'(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{a_s b_s}{(x+s)^2} + \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{a_s\mathfrak{F}'_s + b_s\mathfrak{F}_s}{x+s}, \tag{7}$$

formule qui est certainement valable, pourvu qu'une seule des séries infinies figurant au second membre soit convergente.

Posons par exemple

$$a_s = b_s = (-1)^s s^{\frac{3}{4}},$$

les deux séries $\mathfrak{F}(x)$ et $\mathfrak{F}'(x)$ sont convergentes toutes les deux, tandis que la première des séries infinies figurant au second membre de (7) sera divergente; c'est-à-dire que la formule (7) n'est pas applicable dans ce cas.

Les conditions nécesaires et suffisantes qui doivent être remplies par les fonctions $\mathfrak{F}(x)$ et $\mathfrak{F}'(x)$ pour que la formule (7) soit applicable semblent être assez compliquées.

On voit que le produit figurant au premier membre de (7) ne peut jamais être développé dans une série de la forme $\mathfrak{F}(x)$, ce qui est évident parce que le produit susdit a toujours des pôles du second ordre dans les points $0, -1, -2, -3, \ldots$.

Cherchons maintenant une expression intégrale pour le produit susdit $\mathfrak{F}(x)\cdot\mathfrak{F}'(x)$. A cet effet, posons tout d'abord:

$$\frac{b_n}{x+n}\cdot\mathfrak{F}(x) = \int_0^1 f_n(t)\, t^{x+n-1}dt,$$

une intégration par parties donnera, pourvu que nous ayons à la fois

$$\Re x(+n) > 0, \quad f_n(1) = 0,$$

cette autre formule:

$$\frac{b_n}{x+n}\cdot\mathfrak{F}(x) = -\frac{1}{x+n}\cdot\int_0^1 f_n^{(1)}(t)\, t^{n+1}\cdot t^{x-1}dt.$$

Posons ensuite:

$$\mathfrak{F}(x) = \int_0^1 \varphi(t)\, t^{x-1}dt, \quad \mathfrak{F}'(x) = \int_0^1 \psi(t)\, t^{x-1}dt,$$

nous aurons évidemment:

$$f_n^{1)}(t) = -b_n\cdot t^{-n-1},$$

ce qui donnera, parce que $f_n(1) = 0$,

$$t^n\cdot f_n(t) = \int_t^1 \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}\cdot b_n\cdot\left(\frac{t}{\alpha}\right)^n d\alpha,$$

d'où

$$\frac{b_n}{x+n}\cdot\mathfrak{F}(x) = \int_0^1 dt\cdot t^{x-1}\cdot\int_t^1\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}\cdot b_n\cdot\left(\frac{t}{\alpha}\right)^n d\alpha,$$

ce qui donnera finalement, en vertu d'un théorème bien connu [1]), la formule générale

$$\mathfrak{F}(x)\cdot\mathfrak{F}'(x) = \int_0^1 \chi(t)t^{x-1}dt, \tag{8}$$

où nous avons posé pour abréger

$$\chi(t) = \int_t^1 \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}\cdot\psi\left(\frac{t}{\alpha}\right)d\alpha. \tag{8 bis}$$

On voit que les formules (8) et (8 bis) sont vraies, pourvu qu'une seule des fonctions génératrices $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ soit holomorphe dans l'intérieur du cercle $|t| = 1$. Dans une Note récente [2]) j'ai démontré les mêmes formules dans le cas où une des deux fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle $|1-t| = 1$.

Or, en s'appuyant sur la théorie moderne des intégrales doubles, il n'est pas très difficile de démontrer la validité des deux formules susdites, pourvu que les intégrales $\mathfrak{F}(x)$ et $\mathfrak{F}'(x)$ aient un sens toutes les deux et que $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ soient finies dans l'intervalle $0<t<1$; mais cette démonstration générale nous conduirait beaucoup trop loin ici.

II.

Les intégrales $\mathfrak{G}(x)$ développables dans une série $\mathfrak{F}_n(x)$.

§ 4. Développements formels.

Considérons maintenant cette intégrale:

$$\mathfrak{G}(x) = \int_0^1 \varphi(t)t^{x-1}dt, \tag{9}$$

où il faut admettre généralement $\Re(x)>0$, tandis que

$$\varphi(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \ldots., \qquad |t|\leqq 1; \tag{9 bis}$$

nous aurons évidemment ces deux identités:

$$\mathfrak{G}(x) = \int_0^1 \varphi_n(t)(1-t)^n t^{x-1}dt = \int_0^1 \varphi_{n+p}(t)(1-t)^{n+p}t^{x-1}dt, \tag{10}$$

où nous avons posé pour abrèger:

$$\varphi_n(t) = \varphi(t)\cdot(1-t)^{-n}, \quad \varphi_{n+p}(t) = \varphi(t)\cdot(1-t)^{-n-p}, \tag{10 bis}$$

ce qui donnera:

$$\varphi_{n+p}(t) = \varphi_n(t)\cdot(1-t)^{-p}, \qquad \varphi_n(t) = \varphi_{n+p}(t)\cdot(1-t)^p.$$

[1]) U. Dini: Grundlagen etc. p. 521.

[2]) Rendiconti delle Reale Accademia dei Lincei, 17 janvier 1904.

Posons maintenant:

$$\varphi_n(t) = \sum_{s=0}^{s=\infty} A_{s,n} \cdot t^s, \qquad \varphi_{n+p}(t) = \sum_{s=0}^{s=\infty} A_{s,n+p} \cdot t^s,$$

la règle de CAUCHY concernant la multiplication de deux séries infinies donnera immédiatement ces deux formules:

$$A_{s,n+p} = \sum_{r=0}^{r=s} \binom{p+r-1}{p-1} A_{s-r,n} \tag{11}$$

$$A_{s,n} = \sum_{r=0}^{r=p} (-1)^r \binom{p}{r} A_{s-r,n+p}, \tag{11 bis}$$

dont l'une est inverse à l'autre, et où il faut supprimer dans (11 bis), pour de petites valeurs de s, les coefficients $A_{q,n+p}$, dont le premier indice est négatif. Avec cette restriction, les deux formules (11) s'écriront aussi sous cette forme symbolique:

$$A_{s,n+p} = \Delta^{-p} A_{s,n} \tag{12}$$

$$A_{s,n} = \Delta^{p} A_{s-p,n+p}, \tag{12 bis}$$

où Δ et Δ^{-1} désignent les deux opérations fondamentales du calcul aux différences finies.

Posons particulièrement $n = 0$, les deux groupes de formules (11) et (12) nous conduiront de a_s à $A_{s,p}$ et inversement.

Cela posé, nous avons démontré ce premier théorème concernant le développement en série $\mathfrak{F}_n(x)$ de l'intégrale $\mathfrak{G}(x)$:

Supposons développable en séries $\mathfrak{F}_n(x)$ et $\mathfrak{F}_{n+p}(x)$ l'intégrale $\mathfrak{G}(x)$, comme suit:

$$\mathfrak{G}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{n!\, A^s{}_{,n}}{(x+s)(x+s+1) \ldots (x+s+n)} \tag{13}$$

$$\mathfrak{G}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(n+p)!\, A_{s,n+p}}{(x+s)(x+s+1) \ldots (x+s+n+p)}, \tag{13 bis}$$

les deux groupes de formules (11) *et* (12) *nous conduiront de l'une à l'autre de ces deux séries.*

§ 5. Développement en série $\mathfrak{F}_{n+p}(x)$ de $\mathfrak{F}_n(x)$.

Quant aux développements (13) et (13 bis), nous avons à démontrer ce théorème fondamental:

Supposons développable en série $\mathfrak{F}_n(x)$ une intégrale $\mathfrak{G}(x)$, cette fonction est développable aussi dans une série $\mathfrak{F}_{n+p}(x)$, où p désigne un positif entier quelconque.

La démonstration de ce théorème s'établit à l'aide de la conclusion ordinaire de p à $p+1$; en effet, supposons convergente $\mathfrak{F}_n(x)$, nous avons à démontrer aussi la convergence de $\mathfrak{F}_{n+1}(x)$. A cet égard remarquons que nous avons généralement:

$$A_{s,n} = A_{s,n+1} - A_{s-1,n+1} \tag{α}$$
$$A_{s,n+1} = A_{0,n} + A_{1,n} + A_{2,n} + \dots + A_{s,n}. \tag{β}$$

Cela posé, il est très facile de démontrer cette proposition:

Les deux séries $\mathfrak{F}_n(x)$ et $\mathfrak{F}_{n+1}(x)$, formées avec les coefficients susdits $A_{s,n}$ et $A_{s,n+1}$, seront au même temps convergentes ou divergentes, si nous avons cette valeur limite:

$$\lim_{s=\infty} \frac{A_{s,n+1}}{(s+1)^{n+1}} = 0. \tag{14}$$

En effet, désignons par u_s^n et u_s^{n+1} les termes généraux des séries $\mathfrak{F}_n(x)$ et $\mathfrak{F}_{n+1}(x)$ susdites, nous aurons pour les termes de reste correspondants ces deux expressions:

$$R_{p,q}^n = u_{p+1}^n + u_{p+2}^n + \dots + u_q^n$$
$$R_{p,q}^{n+1} = u_{p+1}^{n+1} + u_{p+2}^{n+1} + \dots + u_q^{n+1},$$

puis appliquons cette identité:

$$\frac{(n+1)!}{w(w+1)(w+2)\dots(w+n+1)} = \frac{n!}{w(w+1)\dots(w+n)} - \frac{n!}{(w+1)(w+2)\dots(w+n+1)},$$

nous aurons immédiatement:

$$R_{n,q}^{n+1} - R_{p,q}^n = \frac{n!\,A_{p+1,n+1}}{(x+p+1)\dots(x+n+p+1)} - \frac{n!\,A_{q,n+1}}{(x+q+1)\dots(x+n+q+1)},$$

ce qui donnera, en vertu de (14), cette autre valeur limite:

$$\lim_{p=\infty} \left(R_{p,q}^{n+1} - R_{p,q}^n\right) = 0,$$

et voilà la démonstration complète de la proposition énoncée. De plus, nous aurons cette autre proposition:

Supposons convergente la série $\mathfrak{F}_n(x)$, nous aurons cette autre valeur limite:

$$\lim_{p=\infty} \sum_{s=0}^{s=p} \frac{A_{s,n}}{(p+1)^{n+1}} = 0. \tag{15}$$

En effet, posons pour abréger

$$\varepsilon_s = \left(\frac{s+1}{p+1}\right)^{n+1}, \quad 0 \leqq s \leqq p,$$

nous aurons les inégalités

$$1 \geqq \varepsilon_{s+1} > \varepsilon_s;$$

divisons maintenant en deux parties la somme que nous avons à considérer

$$S_p = \sum_{s=0}^{s=p} \frac{A_{s,n}}{(p+1)^{n+1}} = \sum_{s=0}^{s=p} \varepsilon_s \cdot \frac{A_{s,n}}{(s+1)^{n+1}},$$

comme suit

$$S_p = \sum_{s=0}^{s=p'} \varepsilon_s \cdot \frac{A_{s,n}}{(s+1)^{n+1}} + \sum_{s=p'+1}^{s=p} \varepsilon_s \cdot \frac{A_{s,n}}{(s+1)^{n+1}},$$

où p' désigne un positif entier qui deviendra infini avec p, mais de sorte que

$$\lim_{p=\infty} \frac{p'}{p} = 0,$$

ce qui a lieu si nous supposons par exemple:

$$p' = \frac{p}{\log p}.$$

Cela posé, la proposition fondamentale due à Abel donnera immédiatement cette valeur limite:

$$\lim_{p=\infty} \sum_{s=p'+1}^{s=p} \varepsilon_s \cdot \frac{A_{s,n}}{(s+1)^{n+1}} = 0,$$

parce que la série numérique $\mathfrak{F}_n(1)$ est convergente.

Quant à la première des deux sommes susdites, nous aurons pour toutes les fractions correspondantes ε_s la valeur limite

$$\lim_{p=\infty} \varepsilon_s = 0,$$

ce qui donnera de la même manière:

$$\lim_{p=\infty} \sum_{s=0}^{s=p'} \varepsilon_s \cdot \frac{A_{s,n}}{(s+1)^{n+1}} = 0,$$

et nous avons ainsi la démonstration complète de (15).

Or, la valeur limite (15) déduite, les formules (β) et (14) montreront que la série $\mathfrak{F}_{n+1}(x)$ sera convergente, pourvu que $\mathfrak{F}_n(x)$ le soit.

Comme corollaire du théorème général que nous venons de démontrer, nous trouverons cette proposition intéressante:

Supposons intégrable terme à terme de $t = 0$ à $t = 1$ la série de puissances (9 bis), *l'intégrale correspondante $\mathfrak{G}(x)$ est développable dans une série $\mathfrak{F}_n(x)$, où n désigne un positif entier fini quelconque, car nous aurons toujours:*

$$\mathfrak{G}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s}{x+s}. \tag{16}$$

Pour illustrer par un exemple d'un certain intérêt le développement d'une fonction $\mathfrak{G}(x)$ à indice fini dans une série $\mathfrak{F}_r(x)$, posons:

$$\beta_n(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{n+1}} dt, \tag{17}$$

où n désigne un positif entier; nous aurons:

$$\beta_n(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1} t^{x-1}}{(1-t^2)^{n+1}} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{s+n}{s} \cdot \int_0^1 t^{2s+x-1}(1-t)^{n+1} dt,$$

ce qui donnera ce développement en série $\mathfrak{F}_{n+1}(x)$:

$$\beta_n(x) = (n+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(s+1)(s+2) \ldots . (s+n)}{(x+2s)(x+2s+1) \ldots . (x+2s+n+1)}, \tag{18}$$

d'où, en posant $s' = \frac{s}{2}$ ou $s' = \frac{s+1}{2}$, selon que s est pair ou impair, ce développement en série $\mathfrak{F}_n(x)$:

$$\beta_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s (s'+1)(s'+2) \ldots . (s'+n)}{(x+s)(x+s+1) \ldots . (x+s+n)}, \tag{18 bis}$$

série qui ne peut pas être transformée en une série $\mathfrak{F}_{n-r}(x)$, où r désigne un positif entier égal à n au plus; car la condition (14) n'est pas remplie ici.

La formule (18 bis) nous fournit un exemple d'une fonction $\mathfrak{G}(x)$ à l'indice n développable en une série $\mathfrak{F}_n(x)$. Cependant je n'ai pas réussi à démontrer généralement qu'une fonction $\mathfrak{G}(x)$ à indice fini peut être développée dans une série de cette forme. Or, une telle recherche est certainement assez difficile dans tous les cas; appliquons en effet la formule (11) pour $n = 0$ à la fonction $\beta_n(x)$, nous trouvons les termes très eloignés de la série (18) sous forme de séries oscillantes entre des limites infinies.

§ 6. Développements de la fonction $\Delta^n \mathfrak{G}(x)$.

Démontrons au contraire cette intéressante propossition concernant la fonction $\Delta^n \mathfrak{G}(x)$:

La différence du n-ième ordre d'une fonction $\mathfrak{G}(x)$ à indice fini λ est toujours développable en une série $\mathfrak{F}_n(x)$, pourvu que $n > \lambda$.

Nous aurons en effet, en vertu de (9):

$$\Delta^n \mathfrak{G}(x) = (-1)^n \cdot \int_0^1 \varphi(t)(1-t)^n t^{x-1} dt, \tag{19}$$

ce qui donnera immédiatement:

$$\Delta^n \mathfrak{G}(x) = (-1)^n \cdot \sum_{s+0}^{s=\infty} \frac{n!\, a_s}{(x+s)(x+s+1) \ldots . (x+s+n)}. \tag{19 bis}$$

Pour la fonction $\beta_n(x)$ introduite dans la formule (17) et qui est de l'indice n, nous avons déjà convergente la série $\mathfrak{F}_n(x)$, savoir:

$$(-1)^n \varDelta^n \beta_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s (s+1)(s+2) \dots (s+n)}{(x+s)(x+s+1) \dots (x+s+n)}, \tag{20}$$

tandis que les série $\mathfrak{F}_{n-r}(x)$ correspondantes deviendront toujours divergentes, comme le montre clairement la valeur limite (14).

Enfin, supposons convergente la série

$$\mathfrak{F}_r(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{r!\ A_{s,r}}{(x+s)(x+s+1) \dots (x+r+s)},$$

nous aurons évidemment ces deux autres développements analogues:

$$(-1)^n \varDelta^n \mathfrak{F}_r(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{r!\ \varDelta^n A_{s-n,r}}{(x+s)(x+s+1) \dots (x+s+r)} \tag{21}$$

$$(-1)^n \varDelta^n \mathfrak{F}_r(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(r+n)!\ A_{s,r}}{(x+s)(x+s+1) \dots (x+s+r+n)}, \tag{21 bis}$$

Remarquons en effet que toutes les séries

$$\mathfrak{F}_r(x+1),\quad \mathfrak{F}_r(x+2),\ \dots,\ \mathfrak{F}_r(x+n)$$

sont convergentes; nous obtenons la formule (21) en réunissant, dans l'expression ordinaire obtenue pour la différence du n-ième ordre, les termes ayant le même dénominateur, mais la formule (21 bis) en réunissant, au contraire, tous les termes contenant le même numérateur.

III.

Nature analytique des intégrales $\mathfrak{G}(x)$ à indice fini.

§ 7. Transformation de l'intégrale $\mathfrak{G}(x)$.

Il est vrai que la question concernant la possibilité du développement en série $\mathfrak{F}_n(x)$ d'une intégrale quelconque $\mathfrak{G}(x)$ à indice fini est restée jusqu'ici sans réponse, mais en revanche il est très facile de démontrer ce nouveau théorème général et très intéressant:

Supposons fini l'indice d'une intégrale $\mathfrak{G}(x)$, il est possible de déterminer un positif entier n, tel que ce développement en série $\mathfrak{F}(x)$:

$$\mathfrak{G}(x) - \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{x-1}{s} \varDelta^s \mathfrak{G}(1) = \binom{n-x}{n} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{(s+1)(s+2) \dots (s+n)} \cdot \frac{a_s}{x+s} \tag{22}$$

est convergente; le symbole $\Delta^n \mathfrak{G}(x)$ *désigne comme ordinairement la différence du n-ième ordre de* $\mathfrak{G}(1)$, *savoir:*

$$\Delta^n \mathfrak{G}(1) = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^n \binom{n}{r} \mathfrak{G}(n-r+1). \tag{22 bis}$$

Ce théorème démontré, nous aurons comme corollaire cette proposition générale concernant la nature analytique de l'intégrale $\mathfrak{G}(x)$:

Les intégrales $\mathfrak{G}(x)$ *à indice fini sont holomorphes dans toutes les parties finies du plan des* x, *en dehors des points isolés* $0, -1, -2, -3, \ldots.,$ *où les fonctions en question ont généralement des pôles simples. Le résidu du pôle* $-s$ *est égal à* a_s.

Or, au lieu du premier de ces deux théorèmes nous préférons démontrer l'autre théorème suivant, beaucoup plus général encore:

Désignons par $f(t)$ *une fonction de* t *intégrable de* $t = 0$ *à* $t = 1$, *puis mettons:*

$$W(x) = \int_0^1 f(t)\, t^{x-1} dt, \quad W(t, y) = \int_0^1 f(\alpha t)\, \alpha^{y-1} d\alpha, \tag{23}$$

nous aurons cette formule génerale

$$W(x) - \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{x-1}{s} \Delta^s W(1) = (-1)^{n-1} \cdot n \cdot \binom{n-x}{n} \int_0^1 \left(\Delta_y^{n-1} W(t, y)\right)_{y=1} \cdot t^{x-1} dt. \tag{23 bis}$$

Pour établir la démonstration de ce théorème, introduisons cette suite de fonctions:

$$f_1(t) = \int_0^t f(t)\, dt$$

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(t)\, dt$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n(t) = \int_0^t f_{n-1}(t)\, dt,$$

puis appliquons une formule intégrale bien connue, nous aurons:

$$f_n(t) = \frac{1}{(n-t)!} \cdot \int_0^t (1-\alpha)^{n-1} \cdot f(\alpha)\, d\alpha = \frac{t^n}{(n-1)!} \cdot \int_0^1 (1-\alpha)^{n-1} \cdot f(\alpha t)\, d\alpha,$$

ou, ce qui revient au même:

$$f_n(t) = \frac{(-1)^{n-1} t^n}{(n-1)!} \left(\Delta_y^{n-1} W(t, y)\right)_{y=1}. \tag{α}$$

Cela posé, une intégration par parties donnera, en vertu de (23),

$$W(x) = K_1 + (1-x) \int_0^1 f_1(t)\, t^{x-2} dt, \tag{β_1}$$

où K_1 désigne une constante par rapport à x; pour déterminer la valeur de K mettons dans (β_1) $x = 1$, nous aurons:

$$K_1 = W(1),$$

ce qui donnera:

$$\frac{W(x)-W(1)}{1-x} = \int_0^1 f_1(t)\, t^{x-2} dt, \tag{γ_1}$$

d'où, après une nouvelle intégration par parties:

$$\frac{W(x)-W(1)}{1-x} = K_2 + (2-x)\int_0^1 f_1(t)\, t^{x-3} dt, \tag{β_2}$$

ce qui donnera pour $x = 2$:

$$K_2 = -\frac{1}{1!} \cdot \varDelta W(1),$$

de sorte que nous obtenous cette nouvelle formule:

$$\frac{W(x)-W(1)-\binom{x-1}{1}\varDelta W(1)}{(1-x)(2-x)} = \int_0^1 f_2(t)\, t^{x-3} dt. \tag{γ_2}$$

Supposons maintenant vraie la formule générale

$$\frac{W(x)-\sum\limits_{s=0}^{s=p-1}\binom{x-1}{s}\varDelta^s W(1)}{(1-x)(2-x)\ldots(p-x)} = \int_0^1 f_p(t)\, t^{x-p-1} dt, \tag{γ_p}$$

une nouvelle intégration par parties donnera pour le second membre de (γ_p) cette expression nouvelle:

$$K_{p+1} + (p+1-x)\cdot\int_0^1 f_{p-1}(t)\, t^{x-p-2} dt,$$

d'où, en posant $x = p+1$

$$W(p+1) - \sum_{s=0}^{s=p-1}\binom{p}{s}\varDelta^s W(1) = (-1)^p p!\, K_{p+1}.$$

Or, d'après une formule fondamentale du calcul aux différences finies nous aurons

$$W(p+1) = \sum_{s=0}^{s=p}\binom{p}{s}\varDelta^s W(1),$$

ce qui donnera pour K_{p+1} cette valeur:

$$K_{p+1} = \frac{(-1)^p}{p!} \cdot \varDelta^p W(1),$$

et telle est, en vertu de (α), la démonstration complète de la formule générale (23 bis).

L'analogie entre notre formule générale (23 bis) et la formule d'interpolation de Newton est évidente; or, comme nous le démontrerons dans le paragraphe suivant, la formule (23 bis) nous conduira pour $n = \infty$ à une série convergente, ce qui n'a pas lieu généralement pour la formule de Newton.

Pour établir maintenant la formule (22) nous aurons à remplacer dans les formules précédentes la fonction $f(t)$ par cette série de puissances:

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots,$$

ce qui donnera sans peine:

$$\frac{t^n}{(n-1)!}\cdot\int_0^1 (1-\alpha)^{n-1}\varphi(\alpha t)\,d\alpha = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{a_s t^{n+s}}{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)},$$

d'où, en vertu de (γ_p), la formule (22), pourvu que le positif entier n soit plus grand que l'indice λ de l'intégrale $\mathfrak{G}(x)$.

Supposons particulièrement que $\mathfrak{G}(x)$ soit développable dans une série $\mathfrak{F}(x)$, la démonstration de (22) peut être établie en formant successivement, à l'aide de la série $\mathfrak{F}(x)$ elle-même, les premiers membres des formules (γ_p).

§ 8. Applications.

Cette méthode s'applique immédiatement à la fonction $\Psi(x)$ de Gauss introduite dans la formule (5), car l'identité numérique $\Psi(1) = -C$ nous permet d'écrire la formule (5) sous cette forme nouvelle:

$$\Psi(x) - \Psi(1) = -\binom{1-x}{1}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{x+s};$$

de plus, nous aurons évidemment:

$$\varDelta\Psi(x) = \frac{1}{x}, \quad \varDelta^r\Psi(x) = \frac{(-1)^{r-1}(r-1)!}{x(x+1)\ldots(x+r-1)},$$

ce qui donnera immédiatement, en vertu de (22), pour la fonction $\Psi(x)$ cette nouvelle expression:

$$\Psi(x) = -C + \sum_{s=1}^{s=n-1}\frac{(-1)^s}{s}\cdot\binom{x-1}{s} - \binom{n-x}{n}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\ldots n}{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}\cdot\frac{1}{x+s}, \tag{24}$$

où n désigne un positif entier fini quelconque; la formule (24) est très remarquable si on la compare à la formule (6).

Considérons comme second exemple de (22) la fonction $\beta_n(x)$ introduite dans la formule (17), nous aurons immédiatement:

$$\beta_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1}\binom{x-1}{s}\varDelta^s\beta_n(1) + \binom{n-x}{x}\cdot\beta(x),$$

où nous avons posé pour abréger:

$$\beta(x) = \int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{x+s}, \tag{25}$$

ou, ce qui revient au même:

$$\beta(x) = -D_x \log B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\Psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{x}{2}\right)\right). \tag{25 bis}$$

Or, je dis que la différence $\varDelta^r \beta_n(1)$ est un nombre rationnel; nous aurons en effet:

$$\varDelta^r \beta_n(1) = \int_0^1 \frac{(t-1)^r}{(1+t)^{n+1}}\,dt = \int_0^1 \frac{[(t+1)-2]^r}{(1+t)^{n+1}}\,dt,$$

ce qui donnera finalement, après un simple calcul, cette formule intéressante:

$$\beta_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \mathfrak{A}_{s,n} \cdot \binom{x-1}{s} + \binom{n-x}{n} \cdot \beta(x), \tag{26}$$

où nous avons posé pour abréger:

$$\mathfrak{A}_{r,n} = -\frac{r!\,(n-r)!}{n!\,2^{n-r}} + \sum_{s=0}^{s=r} \frac{(-1)^s \binom{r}{s} \cdot 2^s}{n-r+s}. \tag{26 bis}$$

IV.

Développement de $\mathfrak{G}(x)$ en série $\mathfrak{D}(x)$ de coefficients binomiaux.

§ 9. Développement de l'intégrale $W(x)$.

Dans la section précédente nous venons de soumettre l'intégrale définie $W(x)$, qui figure dans la première des formules (23), à une transformation intéressante; ici nous avons à considérer d'un autre point de vue l'intégrale susdite, ce qui augmentera beaucoup l'intérêt de la formule générale (23 bis).

A cet effet, prenons comme point de départ l'identité évidente

$$W(x) = \int_0^1 f(t)\, t^{x-1} dt = \int_0^1 f(t)[1-(1-t)]^{x-1} dt,$$

puis remarquons que cette série de puissances, où $\Re(x) > 0$,

$$[1-(1-t)]^{x-1} = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \binom{x-1}{s} (1-t)^s$$

est intégrable terme à terme de $t=0$ à $t=1$; un théorème bien connu concernant l'intégration d'une série infinie[1]) donnera ce résultat remarquable:

[1]) U. Dini: Grundlagen etc. p. 521.

Pour la fonction $W(x)$ susdite nous obtenons ce développement en série $\mathfrak{B}(x)$ de coefficients binomiaux:

$$W(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \Delta^s W(1) \cdot \binom{x-1}{s}, \tag{27}$$

convergente généralement, pourvu que $\Re(x) > 0$.

Cela posé, une comparaison des deux formules (23 bis) et (27) donnera ce corollaire intéressant:

Le terme de reste de la série infinie figurant au second membre de (27) se présente sous cette forme singulière:

$$R_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} \cdot n \cdot \binom{n-x}{n} \cdot \int_0^1 \left(\Delta_y^{n-1} W(t, y)\right)_{y=1} \cdot t^{x-1} dt. \tag{27 bis}$$

Supposons particulièrement que la fonction génératrice $f(t)$ de $W(x)$ satisfasse aux conditions habituelles de nos recherches précédentes, savoir d'être holomorphe à l'intérieur du cercle $|t| = 1$ et que ses coefficients soient à ordre fini, nous aurons ce théorème plus particulier concernant l'intégrale $\mathfrak{G}(x)$:

Une intégrale $\mathfrak{G}(x)$ à indice fini est toujours développable en série $\mathfrak{B}(x)$ de coefficients binomiaux, comme suit:

$$\mathfrak{G}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \Delta^s \mathfrak{G}(1) \cdot \binom{x-1}{s}, \quad \Re(x) > 0, \tag{28}$$

dont le terme de reste se présente sous cette forme remarquable:

$$R_{n-1}(x) = \binom{n-x}{n} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}{(s+1)(s+2) \ldots\ldots (s+n)} \cdot \frac{a_s}{x+s}. \tag{28 bis}$$

§ 10. Propriétés générales d'une série $\mathfrak{B}(x)$.

Généralement les séries $\mathfrak{B}(x)$ de coefficients binomiaux que nous venons d'introduire possèdent une suite de propriétés singulières, dont la plupart peuvent être démontrées par un procédé analogue à celui que j'ai appliqué dans mes recherches sur les séries de factorielles [1]).

Introduisons en effet la fonction auxiliaire

$$\Gamma_n(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-1) \cdot n^x}{x(x+1) \ldots\ldots (x+n-1)},$$

où n désigne un positif entier fini, nous aurons évidemment cette valeur limite:

$$\lim_{n=\infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x),$$

[1]) Annales de l'École Normale (3), t. 19, p. 412; 1902.

tandis que le coefficient binomial se présente sous la forme nouvelle

$$\binom{x-1}{n} = (-1)^n \binom{n-x}{n} = \frac{(-1)^n}{\Gamma_n(1-x)\cdot n^x}, \tag{29}$$

d'où cette valeur limite, fondamentale dans ce qui suit:

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{\binom{x-1}{n}}{\binom{y-1}{n}} \right| = \begin{cases} 0 \\ \textit{quantité finie et déterminée} \\ \infty \end{cases} \tag{29 bis}$$

selon que $\Re(x-y) \gtreqless 0$, et pourvu que ni x ni y soit égal à un *positif entier.*

Cela posé, considérons la série suivante de coefficients binomiaux:

$$\mathfrak{B}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \cdot \binom{x-1}{s}, \tag{30}$$

soumise seulement à la condition d'être convergente pour des valeurs finies de x, tandis que les coefficients a_s sont indépendants de x; je dis que nous aurons ces deux propositions fondamentales:

Supposons finis tous les termes de la série $\mathfrak{B}(x)$, la série $\mathfrak{B}(x')$ sera certainement absolument convergente, pourvu que $\Re(x'-x) > 1$.

Nous aurons en effet, en vertu de (29),

$$\left| \frac{a_s \cdot \binom{x'-1}{s}}{a_s \cdot \binom{x-1}{s}} \right| = \frac{K}{n^{\Re(x'-x)}}, \tag{α}$$

où K désigne une quantité positive finie, ce qui démontrera immédiatement la justesse de notre assertion.

De plus, la formule (α) donnera cette nouvelle proposition:

Les deux séries à termes positifs

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \left| a_s \cdot \binom{\xi + i\eta - 1}{s} \right|, \quad \sum_{s=8}^{s=\infty} \left| a_s \cdot \binom{\xi + i\eta' - 1}{s} \right|,$$

où ξ, η et η' désignent des quantités réelles, sont en même temps convergentes ou divergentes.

Cela posé, il est très facile de démontrer le théorème général suivant:

Le champ de convergence absolue de la série $\mathfrak{B}(x)$ de coefficients binomiaux figurant au second membre de (30) *est la partie finie du demi-plan situé à droite d'une certaine ligne perpendiculaire à l'axe des nombres réels. La série de ce genre obtenue pour l'intégrale définie $W(x)$ figurant dans* (23) *est absolument convergente, pourvu que $\Re(x) \geqq 1$.*

Démontrons maintenant que la forme très singulière des coefficients dans les deux séries particulières figurant dans (27) et (28) est appliquable aussi à la série générale (30), si cette série est convergente, pourvu que $\Re(x) > 0$.

Posons en effet dans (30) $x = n+1$, où n désigne un entier non négatif, ce qui est permis, nous aurons:

$$\mathfrak{B}(n+1) = \sum_{s=0}^{s=n} a_s \cdot \binom{n}{s}, \tag{31}$$

ce qui donnera immédiatement cette formule générale,

$$a_n = \Delta^n \mathfrak{B}(1). \tag{31 bis}$$

Il est digne de remarque que les séries générales de la forme (30) admettent un développement du zéro; nous aurons en effet, pourvu que $\Re(x) > 1$:

$$(1-1)^{x-1} = 0 = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \binom{x-1}{s}. \tag{32}$$

Tout en me réservant de revenir dans une autre occasion sur les séries intéressantes $\mathfrak{B}(x)$, séries que M. PINCHERLE[1]) a étudiées récemment à un autre point de vue, je remarque en passant que nous avons cet autre théorème général:

Le champ de convergence, absolue ou non, d'une série $\mathfrak{B}(x)$ est aussi la partie finie du demi-plan situé à droite d'une certaine ligne perpendiculaire à l'axe des nombres réels. La distance entre cette ligne et la ligne parallèle qui détermine le champ de convergence absolue de $\mathfrak{B}(x)$ ne peut jamais être plus grande que l'unité.

Cependant la démonstration de ce théorème nous conduirait beaucoup trop loin ici.

§ 11. La fonction $\frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot \mathfrak{B}(x)$.

En revanche nous avons à démontrer cet autre théorème singulier concernant la série $\mathfrak{B}(x)$ figurant dans (30), convergente pourvu que $\Re(x) > 0$:

Supposons convergente pour des valeurs finies de x la série $\mathfrak{B}(x)$ de coefficients binomiaux, cette série de puissances

$$f(t) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s a_s t^s \tag{33}$$

a son rayon de convergence égal à 1 au moins, et nous aurons cette représentation intégrale:

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot \mathfrak{B}(x) = \int_0^1 \frac{f(1-t) \cdot t^{x-1}}{(1-t)^x} dt \tag{33 bis}$$

valable généralement, pourvu que $0 < \Re(x) < 1$.

[1]) Rendiconti delle Reale Academia dei Lincei (5) t. 11, p. 139, 417; 1902. Dans une lettre récente, datée le 14 avril 1904, M. PINCHERLE m'a communiqué la condition nécessaire et suffisante qui doit être remplie par une fonction développable en série $\mathfrak{B}(x)$ de coefficients binomiaux.

Quant au rayon de convergence de la série de puissances $f(t)$, la formule (29) donnera cette valeur limite:

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{a_n}{n^x} \right| = 0,$$

valable dans tout le champ de convergence de $\mathfrak{B}(x)$; c'est-à-dire que la série de puissances (33) est certainement convergente, pourvu que $|t| < 1$.

Cela posé, introduisons dans l'intégrale définie figurant au second membre de (33 bis), au lieu de $f(1-t)$, la série (33), puis intégrons terme à terme, nous aurons, à l'aide d'un tel calcul *formel*:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s a_s \cdot \int_0^1 (1-t)^{s-x} t^{x-1} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s a_s \cdot \frac{\Gamma(s+1-x)\,\Gamma(x)}{s!}; \qquad (\alpha)$$

or, supposons convergente la série $\mathfrak{B}(x)$, le second membre de (α) n'est autre chose que

$$\Gamma(1-x)\,\Gamma(x) \cdot \mathfrak{B}(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot \mathfrak{B}(x);$$

c'est-à-dire qu'un théorème général concernant l'intégration d'une série infinie[1]) nous conduira immédiatement de (α) à (33 bis).

Posons maintenant dans (33 bis) $1-x$ au lieu de x, puis transformons l'intégrale définie ainsi obtenue en mettant $1-t$ au lieu de t, nous aurons de même:

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot \mathfrak{B}(1-x) = \int_0^1 \frac{f(t)\, t^{x-1}}{(1-t)^x} dt,$$

d'où cette proposition remarquable:

Supposons que la fonction $f(t)$ satisfasse à cette équation fonctionelle

$$f(1-t) = f(t),$$

la fonction $\mathfrak{B}(x)$ deviendra solution de cette même équation, savoir

$$\mathfrak{B}(1-x) = \mathfrak{B}(x).$$

Considérons par exemple la fonction $\Psi(x)$ de Gauss, la formule (24) donnera immédiatement ce développement en série $\mathfrak{B}(x)$, dû à Stern[2]):

$$\Psi(x) = -C + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s} \cdot \binom{x-1}{s}, \qquad (34)$$

et valable, pourvu que $\Re(x) > 0$, ce qui donnera, en vertu de (33 bis), la formule intégrale

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot (\Psi(x) + C) = \int_0^1 \frac{\log t \cdot t^{x-1}}{(1-t)^x} dt, \qquad (35)$$

[1]) U. Dini: Grundlagen etc. 521.

[2]) Zur Theorie der Eulerschen Integrale p. 39; Göttinger Studien 1847.

où il faut admettre $0 < \Re(x) < 2$, d'où cette série nouvelle:

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot (\Psi(x) + C) = -\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{(x+s)^2} \binom{x+s-1}{s}, \tag{36}$$

valable, pourvu que $\Re(x) < 2$.

Posons dans (36) $x = 1$, nous aurons une identité formelle, tandis que l'hypothèse $x = \frac{1}{2}$ donnera la série numérique pour $\pi \cdot \log 2$ que j'ai déduite récemment[1]) comme cas particulier des séries beaucoup plus générales.

La formule intégrale (35) est très interessante du reste, parce qu'elle peut être considérée comme généralisation d'une autre formule intégrale très connue.

Différentions en effet par rapport à x l'identité

$$B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{(1-t)^x} dt, \quad 0 < \Re(x) < 1;$$

nous aurons

$$\frac{\pi^2}{\sin \pi x} \cdot \cot \pi x = \int_0^1 \frac{\log(1-t) - \log t}{(1-t)^x} \cdot t^{x-1} dt. \tag{β}$$

Or, mettons dans (35) $1-x$ au lieu de x, puis transformons l'intégrale définie correspondante en remplaçant t par $1-t$; une soustraction des deux formules intégrales ainsi obtenues conduira immédiatement à (β).

V.

Sur le développement en serie de factorielles de $\mathfrak{G}(x)$.

§ 12. Impossibilité du problème général.

Le problème concernant la transformation *générale* d'une série $\mathfrak{F}_n(x)$ à une série de factorielles et inversement doit être désigné à l'avance comme *impossible.* En effet, nous savons que la somme d'une série convergente $\mathfrak{F}_n(x)$ est une fonction qui ne peut pas avoir, dans toutes les parties finies du plan des x, d'autres singularités que des pôles simples, tandis que les fonctions développables en séries de factorielles peuvent présenter aussi des singularités transcendantes; c'est-à-dire que de telles fonctions sont beaucoup plus générales que les séries $\mathfrak{F}_n(x)$. Or, cette différence entre les deux classes de fonctions susdites est également évidente à un point de vue purement analytique.

[1]) Annali di Matematica (3), t. 9, p. 218; 1903.

En effet, l'origine des séries de factorielles doit être cherchée dans des intégrales définies de la forme

$$\Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t) \cdot t^{x-1} dt,$$

où la fonction génératrice $\varphi(t)$ doit être holomorphe aux environs du point $t = 1$ et cela de telle sorte que la série de puissances

$$\varphi(1-t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \ldots.$$

a son rayon de convergence égal à un au moins; de plus, $\varphi(t)$ doit satisfaire à des conditions ultérieures faciles à indiquer du reste et qui se trouvent énumérées dans mes divers mémoires concernant la théorie des séries de factorielles [1]; M. PINCHERLE [2]) a indiqué sous forme plus élégante quelques-unes des conditions susdites mais sans en altérer le caractère général.

Au contraire, pour que l'intégrale définie susdite représente une série $\mathfrak{F}_n(x)$ la fonction génératrice $\varphi(t)$ doit être holomorphe aux environs du point $t = 0$ et satisfaire du reste aux conditions énumérées dans le § 2.

On voit par exemple que cette série de factorielles:

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{\frac{1}{2}+t} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s)} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{s+1},$$

convergente dans toute l'étendue du plan des x à l'exception des points isolés $0, -1, -2, -3, \ldots$, n'est pas développable dans une série $\mathfrak{F}_n(x)$.

Au contraire, la fonction

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{\frac{3}{2}-t} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{x+s} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{s+1},$$

développable dans toutes les séries $\mathfrak{F}_n(x)$, n'est pas développable dans une série de factorielles.

En somme, nous avons ce théorème général:

Les intégrales définies de la forme susdite représentent toutes les fonctions développables et en série de factorielles et en séries $\mathfrak{F}_n(x)$, pourvu que la fonction génératrice $\varphi(t)$ soit holomorphe à l'intérieur de ces deux cercles $|t| = 1$ et $|1-t| = 1$ et qu'elle satisfasse encore aux deux groupes des conditions ci-dessus énoncées.

On voit que cette condition est assez incommode pour des applications; M. PINCHERLE [3]) a démontré, en suivant une méthode directe, que la transformation

[1]) Comptes rendus 30 décembre 1901. Annales de l'École Normale (3) t. 19; 1902. Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei 17 janvier 1904. Annales de l École Normale (sous presse) Mathematische Annalen (sous presse).

[2]) Renditonti della Reale Accademia dei Lincei 16 février 1902, 8 novembre 1903.

[3]) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 2, p. 225—226; 1888. Journal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas, t 11, p. 129—135; Coimbra 1893.

susdite est certainement possible, pourvu que $\varphi(t)$ soit holomorphe à l'intérieur du cercle $|t| = 2$; mais généralement il semble impossible de donner sous une forme simple les conditions *suffissantes* et *nécessaires* qui doivent être remplies par une fonction développable à la fois en série de factorielles et en séries $\mathfrak{F}_n(x)$.

En effet, supposons vraie une identité de la forme

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{n!\, A_{s,n}}{(x+s)(x+s+1)\ldots.(x+s+n)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, b_s}{x(x+1)(x+2)\ldots.(x+s)}, \tag{37}$$

où les coefficients $A_{s,n}$ et b_s sont indépendants de x, puis chercherons à transformer l'une de ces séries en l'autre, une telle transformation, présente des difficultés, très intéressantes dans la théorie générale des séries dont la somme et une fonction analytique, et absolument inévitables pour le problème plus particulier qui nous occupe ici.

§ 13. Formules de transformation.

Quant aux formules de transformation qui nous conduiront de l'une à l'autre des deux séries (37), nous aurons tout d'abord:

$$\frac{n!}{(x+r)(x+r+1)\ldots.(x+r+n)} = \sum_{s=0}^{s=r} \frac{(-1)^s \binom{r}{s}(n+s)!}{x(x+1)\ldots.(x+n+s)}, \tag{38}$$

formule qui est une conséquence immédiate de l'identité intégrale

$$I = \int_0^1 (1-t)^n t^{x+r-1}\, dt = \int_0^1 t^n (1-t)^r (1-t)^{x-1}\, dt;$$

nous aurons en effet pour I cette expression nouvelle:

$$I = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{r}{s} \cdot \int_0^1 t^{n+s}(1-t)^{x-1}\, dt,$$

et la définition intégrale de la fonction *beta* nous conduira immédiatement au but.

Quant à la transformation inverse de (38), nous avons les formules (4), savoir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{n}\cdot\frac{p!}{x(x+1)\ldots.(x+p)} &= \binom{n-1}{p}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(s+1)(s+2)\ldots.(s+n+p-1)}{(x+s)(x+s+1)\ldots.(x+s+n)} \\ \frac{p!}{x(x+1)\ldots.(x+p)} &= n!\cdot\sum_{s=0}^{s=p-n}\frac{(-1)^s\binom{p-n}{s}}{(x+s)(x+s+1)\ldots.(x+s+n)}, \end{aligned}\right\} \tag{38 bis}$$

où il faut admettre respectivement $n > p$ ou $n \leq p$.

Cela posé, prenons en premier lieu comme point de départ la série $\mathfrak{F}_n(x)$ figurant au premier membre de (37), puis substituons au lieu de ses termes les expressions correspondantes obtenues de (38), nous aurons une série à double entrée Δ. Supposons ensuite qu'il soit permis de ranger les termes de Δ, de telle sorte que nous puissons réunir tous les termes contenant la même factorielle dans le dénominateur, nous aurons pour le coefficient général b_s cette expression:

$$b_{n+r} = (-1)^r \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{r+s}{s} A_{r+s,\,n}, \tag{39}$$

où r désigne un entier non négatif, tandis que nous aurons:

$$b_{n-r} = 0, \quad 0 < r \leqq n. \tag{39 bis}$$

Posons dans (37) $n = 0$, puis cherchons la différence du n-ième ordre des deux séries ainsi obtenues, nous arrivons précisément à la formule générale (37), ce qui s'accorde bien avec la forme singulière du second membre de (39) qui ne dépend de n que dans les coefficients $A_{r+s,\,n}$.

Or, je dis que *l'identité* (37) *peut être possible, quoique l'expression* (39) *pour les coefficients b_s devienne illusoire.*

En effet, posons, conformément à notre remarque concernant le nombre n, $n = 0$, puis mettons:

$$A_{s,0} = (-1)^s,$$

nous aurons pour la fonction $\beta(x)$ introduite dans la formule (25), ces deux développements:

$$\beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{x+s} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\ldots.(x+s)} \cdot \frac{1}{2^{s+1}}; \tag{40}$$

c'est-à-dire:

$$b_r = \frac{1}{2^{r+1}}; \tag{41}$$

néanmoins la formule générale (39) nous donne ce coefficient fini et déterminé sous la forme illusoire:

$$(1+1)^{-r-1} = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \binom{r+s}{s}. \tag{41 bis}$$

En second lieu, supposons donnée la série de factorielles qui figure au second membre de (37), puis appliquons les formules (38 bis), nous aurons de la même manière pour le coefficient général $A_{r,\,n}$ cette expression:

$$A_{r,\,n} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{r+n-s-1}{r} b_s + (-1)^r \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{r+s}{s} b_{n+r+s}; \tag{42}$$

dans le cas particulier $n = 0$, il faut supprimer la série finie qui figure au second membre.

Or, je dis que *l'identité* (37) *peut être possible, quoique l'expression générale* (42) *pour les coefficients* $A_{r,\,n}$ *devienne illusoire.*

Pour illustrer aussi ce postulat par un exemple, posons $n = 0$ et

$$b_s = (-1)^s,$$

nous aurons ces deux développements:

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{2-t}\,dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s s!}{x(x+1)(x+2)\ldots.(x+s)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{x+s}\cdot\frac{1}{2^{s+1}}; \tag{43}$$

c'est-à-dire:

$$A_{r,\,0} = \frac{1}{2^{r+1}}; \tag{43 bis}$$

néanmoins la formule générale (42) nous donne ce coefficient fini et déterminé sous la même forme illusoire (41 bis).

Ces résultats particuliers sont d'un grand intérêt à une époque où nous ne possedons aucune théorie exacte et développée des séries *divergentes*, parce qu'ils montrent que les séries à double entrée ne suffisent pas pour l'étude générale du développément d'une fonction analytique dans des séries de fonctions analytiques données.

Pour l'instant je ne connais pas d'autres développements que ceux qui figurent dans (37) et qui présentent cette singularité; par exemple, dans mes recherches sur les séries de *fonctions cylindriques*[1]) ou de *fonctions bernoulliennes*[2]), les séries à double entrée donnent la théorie complète des développements de ces genres.

VI.

Les fonctions $D^{-1}\mathfrak{G}(x)$ et $\Delta^{-1}\mathfrak{G}(x)$.

§ 14. Formules intégrales.

Il est digne d'intérêt que les séries $\mathfrak{F}(x)$ et les intégrales $\mathfrak{G}(x)$ soumises aux opérations fondamentales de l'Analyse et du calcul aux différences finies nous conduiront à des résultats analogues, ce qui est assez rare en effet dans la théorie des fonctions analytiques.

En premier lieu prenons comme point de départ cette intégrale $\mathfrak{G}(x)$:

$$\mathfrak{G}(x) = \int_0^1 \varphi(t)\,t^{x-1}\,dt,$$

[1]) Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Leipsic 1904.

[2]) Mathematische Annalen (sous presse).

nous aurons évidemment les deux autres représentations intégrales suivantes, très semblables entre elles et applicables là où est applicable l'intégrale donnée $\mathfrak{G}(x)$:

$$D^x \mathfrak{G}(x) = \int_0^1 \varphi(t) \cdot \log t \cdot t^{x-1} dt \tag{44}$$

$$\Delta \mathfrak{G}(x) = -\int_0^1 \varphi(t) \cdot (1-t) \cdot t^{x-1} dt, \tag{44 bis}$$

d'où ces expressions analogues pour l'effectuation des deux opérations inverses:

$$\int \mathfrak{G}(x) dx = \int_0^1 \varphi(t) \cdot \frac{t^{x-1}-1}{\log t} dt + K \tag{45}$$

$$\Delta^{-1} \mathfrak{G}(x) = \int_0^1 \varphi(t) \cdot \frac{1-t^{x-1}}{1-t} dt + \mathfrak{J}(x), \tag{45 bis}$$

où K désigne une constante arbitraire indépendante de x, tandis que $\mathfrak{J}(x)$ est une fonction quelconque de x soumise seulement à la condition de périodicité

$$\mathfrak{J}(x+1) = \mathfrak{J}(x). \tag{46}$$

Cela posé, on voit qu'il est possible de simplifier les deux formules (45) dans le cas particulier, où la fonction génératrice $\varphi(t)$ satisfait à cette condition

$$\lim_{t=+0} \left((1-t)^{-\lambda} \cdot \varphi(1-t)\right) = 0, \tag{47}$$

où λ désigne une quantité positive finie aussi petite qu'on le veut, mais d'une grandeur assignable; nous aurons en effet dans ce cas les formules plus simples:

$$\int \mathfrak{G}(x) dx = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\log t} \cdot t^{x-1} dt + K \tag{48}$$

$$\Delta^{-1} \mathfrak{G}(x) = -\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1-t} \cdot t^{x-1} dt + \mathfrak{J}(x). \tag{48 bis}$$

Supposons plus généralement que $\varphi(t)$ ait, pour $t = 1$, une valeur finie et déterminée $\varphi(1)$, nous aurons ces deux autres formules:

$$\int \mathfrak{G}(x) dx = \varphi(1) \cdot \log x + \int_0^1 \frac{\varphi(t)-\varphi(1)}{\log t} \cdot t^{x-1} dt + K \tag{49}$$

$$\Delta^{-1} \mathfrak{G}(x) = \varphi(1) \cdot \Psi(x) + \int_0^1 \frac{\varphi(1)-\varphi(t)}{1-t} \cdot t^{x-1} dt + \mathfrak{J}(x), \tag{49 bis}$$

où $\Psi(x)$ désigne la fonction de GAUSS, introduite dans (5), ce qui est une conséquence immédiate des identités:

$$D_x \log x = \Delta \Psi(x) = \frac{1}{x} = \int_0^1 t^{x-1} dt.$$

Cela posé, appliquons les deux représentations intégrales suivantes:

$$\log x = \int_0^1 \frac{t^{x-1}-1}{\log t}\,dt, \quad \Psi(x) = \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t}\,dt - C, \tag{50}$$

où C désigne la constante d'EULER, les formules (49) s'écriront sous cette autre forme plus élégante:

$$\int \mathfrak{G}(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\varphi(t)\,t^{x-1}-\varphi(1)}{\log t}\,dt + K \tag{51}$$

$$\Delta^{-1}\mathfrak{G}(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(1)-\varphi(t)\,t^{x-1}}{1-t}\,dt + \mathfrak{J}(x). \tag{51 bis}$$

§ 15. Développement en série $\mathfrak{F}(x)$ de $\Delta^{-1}\mathfrak{G}(x)$.

Quant aux développements en séries $\mathfrak{F}_n(x)$, nous avons démontré, dans le § 2, qu'il est possible de déterminer un positif entier fini n, tel que $\Delta^n\mathfrak{G}(x)$ devienne développable en série $\mathfrak{F}_n(x)$. Pour les deux fonctions

$$D_x\mathfrak{G}(x) \text{ et } \int \mathfrak{G}(x)\,dx,$$

les formules précédentes montrent immédiatement la vérité de cette proposition:

La dérivée et l'intégrale indéfinie d'une fonction $\mathfrak{G}(x)$ ne sont jamais développables en séries $\mathfrak{F}_n(x)$.

Quant à l'intégrale finie $\Delta^{-1}\mathfrak{G}(x)$, nous aurons, au contraire, en vertu de (49 bis), ce résultat:

Supposons finie et déterminée la valeur de $\varphi(t)$ pour $t = 1$, et supposons de plus que la série de puissances

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} [\varphi(1)-(a_0+a_1+a_2+\ldots+a_s)]\cdot t^s \tag{52}$$

soit intégrable terme à terme de $t = 0$ à $t = 1$, nous aurons ce développement en série $\mathfrak{F}(x)$:

$$\Delta^{-1}\mathfrak{G}(x) - \varphi(1)\cdot\Psi(x) + \mathfrak{J}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\varphi(1)-(a_0+a_1+a_2+\ldots+a_s)}{x+s}. \tag{52 bis}$$

Dans le cas particulier, où la série numérique

$$\varphi(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{α}$$

est convergente, les coefficients de la série $\mathfrak{F}(x)$ figurant au second membre de (52 bis) ne sont autre chose que les termes de reste de la série (α); cependant la convergence de (α) n'est pas *nécessaire* pour rendre convergente la série $\mathfrak{F}(x)$ susdite.

Considérons par exemple la fonction $\beta(x)$ introduite dans (25), nous aurons immédiatement:

$$\beta(x) + (\beta(x+1) = \frac{1}{x},$$

ce qui donnera:

$$\varDelta\beta(x) = \frac{1}{x} - 2\beta(x),$$

où, ce qui revient au même:

$$\varDelta^{-1}\beta(x) = \frac{1}{2}\Psi(x) - \frac{1}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{x+s} + \mathfrak{J}(x),$$

quoique la série qui correspond à (α), savoir la série

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots,$$

ne soit pas convergente.

§ 16. Applications de la fonction $\omega_1(x)$.

Considérons maintenant à un autre point de vue les fonctions $D^{-1}\mathfrak{G}(x)$ et $\varDelta^{-1}\mathfrak{G}(x)$, *où* $\mathfrak{G}(x)$ *est supposée développable dans une série* $\mathfrak{F}(x)$

A cet effet posons:

$$\omega_1(x) = \log x - \Psi(x); \tag{53}$$

une formule intégrale due à Cauchy [1]) donnera,

$$\omega_1(x) = \frac{1}{2x} + \int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)e^{-tx}dt = \frac{1}{2x} + \int_0^1\left(\frac{t}{1-t} + \frac{1}{\log t} + \frac{1}{2}\right)\cdot t^{x-1}dt, \tag{53 bis}$$

où il faut admettre $\Re(x) > 0$.

Cela posé, il est très facile de démontrer la proposition fondamentale suivante: *Supposons convergente la série*

$$\mathfrak{F}(x) = \int_0^1 \varphi(t)\, t^{x-1}dt = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{a_s}{x+s},$$

les deux autres séries infinies

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} a_s\cdot\log\left(\frac{x+s}{s+1}\right), \quad \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s\cdot\omega_1(x+s) \tag{β}$$

seront convergentes aussi.

Quant à la première des séries (β), le développement très connu

$$\log\left(\frac{x+s}{s+1}\right) = \frac{1}{1}\cdot\frac{1-x}{s+1} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1-x}{s+1}\right)^2 + \ldots$$

nous conduira immédiatement au but, parce que la série numérique $\mathfrak{F}(1)$ est con-

[1]) Voir la note p. 39.

vergente. Pour démontrer aussi la convergence de la seconde des séries (β), remarquons que la série de puissances

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots$$

est intégrable terme à terme; un théorème très connu[1]) donnera, en vertu de la seconde intégrale (53 bis), cette formule intégrale:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \cdot \left(\omega_1(x+s) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+s}\right) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t} + \frac{1}{\log t} + \frac{1}{2}\right) \varphi(t)\, t^{x-1} dt, \tag{54}$$

ou, ce qui revient au même:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \cdot \omega_1(x+s) = \frac{1}{2} \cdot \mathfrak{F}(x) + \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \varphi(e^{-t}) e^{-tx} dt, \tag{54 bis}$$

où il faut supposer généralement $\Re(x) > 0$.

Appliquons maintenant l'identité suivante:

$$\omega_1(x) = \omega_1(x+1) + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x};$$

nous verrons que la série infinie figurant au premier membre de (54 bis) est convergente encore, pourvu que $\Re(x) > -1$, et ainsi de suite.

Cela posé, nous aurons évidemment:

$$\int_1^x \mathfrak{F}(x)\, dx = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \cdot \log\left(\frac{x+s}{s+1}\right), \tag{55}$$

tandis que nous pouvons admettre:

$$\Delta^{-1} \frac{1}{x+s} = \Psi(x+s) - \log(s+1) = \log\left(\frac{x+s}{s+1}\right) - \omega_1(x+s),$$

ce qui donnera ce théorème intéressant:

Supposons convergente la série $\mathfrak{F}(x)$, *il est possible de déterminer une valeur de* $\Delta^{-1}\mathfrak{F}(x)$, *telle que*:

$$\int_1^x \mathfrak{F}(x)\, dx - \Delta^{-1}\mathfrak{F}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \cdot \omega_1(x+s), \tag{56}$$

ou bien, sous forme d'une intégrale définie:

$$\int_1^x \mathfrak{F}(x)\, dx - \Delta^{-1}\mathfrak{F}(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + 1\right) \varphi(e^{-t}) e^{-tx} dt; \tag{56 bis}$$

dans cette dernière formule il faut admettre généralement $\Re(x) > 0$.

[1]) U. Dini: Grundlagen etc. p. 521.

VII.

Applications à la fonction $\mathfrak{X}(x,y)$.

§ 17. Applications des formules générales.

Comme un premier exemple des applications de notre théorie générale nous avons à étudier une fonction particulière à deux variables indépendantes qui mérite être considérée séparément à cause de ses propriétés intéressantes, savoir la fonction:

$$\mathfrak{X}(x,y) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{y+t}\,dt, \tag{57}$$

où il faut admettre $\Re(x) > 0$, tandis que y peut être une quantité finie quelconque hors des valeurs négatives qui satisfont aux inégalités

$$0 \geqq y \geqq -1,$$

valeurs pour lesquelles l'intégrale susdite deviendra illusoire.

Supposons maintenant $|y| \geqq 1$ et y différent de -1, nous aurons ce développement en série $\mathfrak{F}(x)$:

$$\mathfrak{X}(x,y) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{y^{s+1}} \cdot \frac{1}{x+s}, \tag{58}$$

valable pour une valeur finie quelconque de x.

De plus, des intégrations par parties donnent cette série de factorielles:

$$\mathfrak{X}(x,y) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s+1)} \cdot \frac{1}{(y+1)^{s+1}}, \tag{59}$$

convergente dans toute l'étendue du plan des x, à l'exception des points isolés $0, -1, -2, -3, \ldots$, pourvu que $|y+1| > 1$, et dans le demi-plan déterminé par l'inégalité $\Re(x) > 0$, si nous avons particulièrement $|y+1| = 1$ mais y différent de 0.

Appliquons maintenant les formules de transformation (38) et (38 bis), il sera possible de passer de (58) à (59), pourvu que $|y| > 1$, tandis (39) deviendra illusoire pour $|y| = 1$; quant au passage de (59) à (58), la formule de transformation (42) n'est pas applicable dans le cas particulier $|y+1| = 1$.

Posons encore:

$$\mathfrak{X}_n(x,y) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{(t+y)^{n+1}}\,dt, \tag{60}$$

où n désigne un positif entier, la formule générale (22) donnera ici:

$$\mathfrak{X}_n(x,y) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \mathfrak{A}_{s,n}(y) \cdot \binom{x-1}{s} + \binom{n-x}{n} \cdot \mathfrak{X}(x,y), \tag{61}$$

où nous avons posé pour abréger:

$$\mathfrak{A}_{r,n}(y) = \frac{1}{(y+1)^{n-r}} \cdot \left(\frac{r!}{n(n-1)\ldots.(n-r)} - \sum_{s=0}^{s=r} \frac{(-1)^s \binom{r}{s}}{n-r+s} \cdot \left(\frac{y+1}{y} \right)^s \right). \quad (61 \text{ bis})$$

On voit que le développement de $\mathfrak{X}(x,y)$ en série de coefficients binomiaux ne présente aucun intérêt particulier. Or, appliquons l'identité

$$\Delta_x^n \mathfrak{X}(x,y)_{x=1} = (-1)^n \cdot \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^n}{\alpha + y} d\alpha;$$

nous aurons pour la fonction $f(t)$, introduite dans (33), cette expression intégrale:

$$f(1-t) = \int_0^1 \frac{d\alpha}{(\alpha+y)(\alpha+t-\alpha t)} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{y}\right) + \log t}{yt+t-y},$$

valable pourvu que $|1-\alpha| \leqq 1|$, de sorte que la formule générale (33 bis) donnera ici:

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot \mathfrak{X}(x,y) = \int_0^1 \frac{\log\left(1+\frac{1}{y}\right) + \log t}{(1-t)^x (yt+t-y)} \cdot t^{x-1} dt.$$

Posons maintenant dans cette formule $1-x$ au lieu de x, $\frac{1}{y}$ au lieu de y, puis transformons l'intégrale définie ainsi obtenue en mettant $1-t$ au lieu de t, nous aurons de même:

$$\frac{\pi y}{\sin \pi x} \cdot \mathfrak{X}\left(1-x, \frac{1}{y}\right) = -\int_0^1 \frac{\log(1+y) + \log(1-t)}{(1-t)^x (yt+t-y)} \cdot t^{x-1} dt,$$

ce qui donnera:

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot \left(\mathfrak{X}(x,y) + y \cdot \mathfrak{X}\left(1-x, \frac{1}{y}\right)\right) = -\log y \cdot G(x,y) + D_x G(x,y),$$

où nous avons posé pour abréger:

$$G(x,y) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{(1-t)^x (t+ty-y)} dt;$$

or, nous aurons immédiatement, pourvu que $|y+1| \leqq |y|$:

$$G(x,y) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot (-y)^{x-1},$$

ce qui donnera, en remarquant que $\mathfrak{X}(x,y) + y \cdot \mathfrak{X}\left(1-x, \frac{1}{y}\right)$ doit être positif pour $y > 0$ et $0 < x < 1$, cette équation fondamentale:

$$\mathfrak{X}(x,y) + y \cdot \mathfrak{X}\left(1-x, \frac{1}{y}\right) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot y^{x-1}, \quad (62)$$

valable pour toutes les combinaisons des valeurs finies de x et de y pour lesquelles les deux membres sont des fonctions analytiques.

Remarquons maintenant l'identité

$$\mathfrak{X}(x,y) = \frac{1}{xy}\cdot F\left(1,x,x+1,-\frac{1}{y}\right),$$

où F désigne la série hypergéométrique ordinaire; nous verrons que (62) est un cas particulier d'une formule due à GAUSS[1]).

§ 18. Autres propriétés de $\mathfrak{X}(x,y)$.

Cela posé, étudions la fonction $\Delta_x^{-1}\mathfrak{X}(x,y)$; nous aurons tout d'abord:

$$\mathfrak{X}(x+1,y) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}\big((y+t)-y\big)}{y+t}\,dt = \frac{1}{x} - y\cdot\mathfrak{X}(x,y), \tag{63}$$

ce qui donnera:

$$\Delta_x\mathfrak{X}(x,y) = \frac{1}{x} - (y+1)\cdot\mathfrak{X}(x,y), \tag{63 bis}$$

d'où inversement:

$$\Delta_x^{-1}\mathfrak{X}(x,y) = \frac{1}{y+1}\big(\Psi(x) - \mathfrak{X}(x,y)\big) + \mathfrak{J}(x);$$

c'est-à-dire qu'il est possible de déterminer la fonction arbitraire périodique $\mathfrak{J}(x)$, de sorte que nous aurons, en vertu de (56), une identité de cette forme:

$$\int_1^x \mathfrak{X}(\alpha,y)\,d\alpha - \big(\Psi(x) - \mathfrak{X}(x,y)\big)\cdot\frac{1}{y+1} + \mathfrak{J}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{y^{s+1}}\cdot\omega_1(x+s); \tag{α}$$

à cet effet, mettons dans (α) $x+1$ au lieu de x, puis appliquons (63), nous aurons

$$\mathfrak{J}(x) = -\frac{1}{2y}\cdot\int_0^1 \mathfrak{X}(\alpha+1,y)\,d\alpha;$$

c'est-à-dire que nous avons démontré la proposition intéressante que voici:

Posons pour abréger

$$\gamma(y) = \frac{1}{2y}\cdot\int_0^1 \mathfrak{X}(\alpha+1,y)\,d\alpha; \tag{64}$$

nous aurons

$$\int_1^x \mathfrak{X}(\alpha,y)\,d\alpha - \frac{1}{y+1}\big(\Psi(x) - \mathfrak{X}(x,y)\big) - \gamma(y) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{y^{s+1}}\cdot\omega_1(x+s), \tag{65}$$

ou bien, pourvu que $\Re(x) > 0$:

$$\int_1^x \mathfrak{X}(\alpha,y)\,d\alpha = \frac{1}{y+1}\cdot\big(\Psi(x) + y\cdot\mathfrak{X}(x,y)\big) + \gamma(y) + \int_0^1\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right)\frac{e^{-tx}}{y+e^{-t}}\,dt. \tag{65 bis}$$

[1]) Disquisitiones generales circa functiones a serie infinita etc. § 49. Werke, t. III.

Revenons maintenant à la formule (58), puis désignons par

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n$$

toutes les racines de cette équation $x^n = 1$, tandis que r est un nombre entier, nous aurons aisément:

$$\sum_{s=1}^{s=n} \varepsilon_s^r \cdot \mathfrak{X}(x, \varepsilon_s y) = (-y)^{n-r} \cdot \mathfrak{X}\left(\frac{x-r-1}{n}, -(-y)^n\right); \tag{66}$$

supposons au contraire que

$$\delta_1 \delta_2 \delta_3 \dots \delta_n$$

soient toutes les racines de l'équation $x^n = -1$, nous aurons

$$\sum_{s=1}^{s=n} \delta_s^r \cdot \mathfrak{X}(x, \delta_s y) = -(-y)^{n-r} \cdot \mathfrak{X}\left(\frac{x+r-1}{n}, (-y)^n\right). \tag{66 bis}$$

Cherchons encore une expression intégrale pour le produit $\mathfrak{X}(x,y) \cdot \mathfrak{X}(x,z)$, la formule (8 bis), donnera immédiatement:

$$\mathfrak{X}(x,y) \cdot \mathfrak{X}(x,z) = \int_0^1 \xi(t)\, t^{x-1} dt,$$

où nous avons posé pour abréger:

$$\xi(t) = \int_t^1 \frac{da}{(ya+t)(z+a)},$$

où, ce qui est équivalent:

$$\xi(t) = \frac{1}{-yz+t} \cdot \log \frac{(1+z)(1+y)t}{(y+t)(z+t)},$$

de sorte que nous obtenons finalement, pourvu que $\Re(x) > 0$:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X}(x,y) \cdot \mathfrak{X}(x,z) &= D_x \mathfrak{X}(x, -yz) + \big(\log(1+y) + \log(1+z)\big) \cdot \mathfrak{X}(x, -yz) - \\ &- \int_0^1 \frac{\log(y+t) + \log(z+t)}{-yz+t}\, dt, \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

formule de laquelle nous pouvons déduire immédiatement un grand nombre des formules concernant le carré de $\Psi(x)$ que j'ai démontrées récemment par une méthode directe[1]).

§ 19. Étude de $\mathfrak{X}(x,y)$ considérée comme fonction de y.

Enfin nous avons aussi à étudier $\mathfrak{X}(x,y)$ comme fonction de y; en premier lieu appliquons une méthode que j'ai appelée la méthode de Stirling[2]); nous aurons, en vertu de (58) et (59), ces deux développements en séries de factorielles:

[1]) Annali di Matematica (3), t. 9, p. 197—201; 1903.

[1]) Annales de l'E'cole Normale (3), t. 19, p 437; 1902. Mathematische Annalen (sous presse).

$$\mathfrak{X}(x,y) = \frac{1}{xy} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\dfrac{(-1)^s C_s^0}{x+s} + \dfrac{(-1)^{s-1} C_s^1}{x+s-1} + \cdots - \dfrac{C_s^{s-1}}{x+1}}{y(y+1)(y+2)\cdots(y+s)} \tag{68}$$

$$\mathfrak{X}(x,y) = \frac{1}{x(y+1)} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\dfrac{s!\,C_s^0}{x\cdots(x+s)} + \dfrac{(s-1)!\,C_s^1}{x\cdots(x+s-1)} + \cdots + \dfrac{1!\,C_s^{s-1}}{x(x+1)}}{(y+1)(y+2)(y+3)\cdots(y+s+1)}, \tag{68 bis}$$

où les coefficients C_s^r sont les nombres de STIRLING définis à l'aide de l'identité

$$x(x+1)\cdots(x+s-1) = C_s^0 x^s + C_s^1 x^{s-1} + \cdots + C_s^r x^{s-r} + \cdots + C_s^{s-1} x.$$

Les deux séries (68) et (68 bis) sont certainement convergentes, pourvu que x désigne une quantité finie qui ne doit pas être égale à $0, -1, -2, -3, \ldots$, tandis que nous avons respectivement $\Re(y) > 1$, $\Re(y) > 0$.

Cependant, notre évaluation des deux séries de factorielles susdites ne permet pas de déterminer exactement leurs champs de convergence. Pour obtenir une telle détermination exacte il faut écrire sous cette forme notre fonction $\mathfrak{X}(x,y)$:

$$\mathfrak{X}(x,y) = \int_0^1 \varphi(t,x)\, t^{y-1}\, dt. \tag{69}$$

Or, la formule (58) donnera immédiatement:

$$\mathfrak{X}(x,y) = \int_0^\infty z^{-x} P(x,z) e^{-zy} dz, \qquad \Re(y) > 0, \tag{70}$$

où $P(x,z)$ désigne la fonction de M. PRYM, savoir:

$$P(x,z) = \int_0^z e^{-u} u^{x-1} du = z^x \cdot \int_0^1 e^{-zu} u^{x-1} du, \tag{β}$$

ou, ce qui revient au même:

$$P(x,z) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s z^{x+1}}{s!\,(x+s)} = e^{-z} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{z^{x+1}}{x(x+1)\cdots(x+s)}. \tag{γ}$$

Posons maintenant dans (70) $z = -\log t$, nous aurons, en vertu de (β), l'expression suivante pour la fonction génératrice $\varphi(t,x)$ figurant dans (69):

$$\varphi(t,x) = \int_0^1 t^u u^{x-1} du, \qquad \Re(x) > 0. \tag{69 bis}$$

Cela posé, il est évident que $\varphi(t,x)$ est, considérée comme fonction de t, holomorphe à l'intérieur du cercle $|1-t| = 1$ et qu'elle n'a sur la circonférence de ce cercle que le seul point singulier $t = 0$. De plus, nous aurons, en vertu de (69 bis):

$$\lim_{t=+0} \left| t^\lambda \cdot \varphi(t,x) \right| = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}, \tag{71}$$

selon que $\lambda \gtrless 0$.

Cependant la valeur limite (71) n'est démontrée que si $\Re(x) > 0$; or, nous auvons, en vertu de la seconde série (γ):

$$-\log t \cdot \big(P(x+1, -\log t) - \log t\big) = x \cdot P(x, -\log t) - t, \tag{δ}$$

tandis que (67 bis) donnera:

$$\varphi(t,x) = (-\log t)^{-x} \cdot P(x, -\log t),$$

d'où, en vertu de (δ):

$$\varphi(t, x+1) = x \cdot \varphi(t,x).(\log t)^2 - t \cdot (-\log t)^{2-x};$$

c'est-à-dire que la valeur limite (71) est vraie encore pour $\Re(x) > -1$ et ainsi de suite.

Cela posé, mon théorème général concernant le champ de convergence d'une série de factorielles [1]) donnera cette proposition:

Supposons que x désigne une quantité finie, non égale à un entier négatif ou à zéro, les séries de factorielles (68) et (68 bis) sont convergentes, pourvu que $\Re(x) > 0$.

Comme cas particuliers de $\mathfrak{X}(x, y)$ mentionnons seulement les deux suivants:

$$\mathfrak{X}(x, 1) = \beta(x) \tag{72}$$

$$\mathfrak{X}(1, y) = \log\left(1 + \frac{1}{y}\right), \tag{72 bis}$$

ou $\beta(x)$ désigne la fonction introduite dans (25).

La dernière des deux formules (72) nous permet, en vertu de (68) et (68 bis), de déterminer exactement les champs de convergence des séries de factorielles données par BINET [2]) pour les deux fonctions $\omega(x)$ et $\omega_1(x)$, séries que nous avons à déduire d'un autre point de vue dans la dernière section de ce mémoire. Du reste j'ai déterminé récemment [3]), par une méthode entièrement élémentaire, les champs de convergence susdits.

VIII.

Applications sur la fonction gamma.

§ 20. Les deux fonctions $\Delta^{-1}\beta(x)$ et $\Delta^{-1}\Psi(x)$.

Comme un second exemple des applications de nos formules générales, étudions ces deux fonctions:

$$\Delta^{-1}\Psi(x), \quad \Delta^{-1}\beta(x),$$

ou, ce qui revient au même, ces deux autres fonctions

$$\Phi(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\omega_1(x+s) - \frac{1}{2(x+s)}\right) \tag{73}$$

$$\Pi(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \left(\omega_1(x+s) - \frac{1}{2(x+s)}\right), \tag{73 bis}$$

[1]) Annales de l'École Normale (3), t. 19, p. 421; 1902.

[2]) Journal de l'École polytechnique, cahier 27, p. p. 231, 234, 258, 339; 1839.

[3]) Annali di Matematica, (3) t. 9, p. 237—245; 1903.

fonctions qui sont très semblables entre elles et analogues du reste aux fonctions célèbres $\omega(x)$ et $\omega_1(x)$, savoir:

$$\omega(x) = \log \Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \log x + x - \log \sqrt{2\pi}$$

$$\omega_1(x) = \log x - \Psi(x) = \frac{1}{2x} - D_x\, \omega(x).$$

Cela posé, cette formule intégrale due à Cauchy [1])

$$\omega(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{t}\left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) dt, \quad \Re(x) > 0, \tag{α}$$

donnera immédiatement l'autre formule analogue

$$\omega_1(x) = \frac{1}{2x} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) e^{-tx}\, dt, \quad \Re(x) > 0, \tag{β}$$

d'où, en vertu de (73) et (73 bis):

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \frac{e^{-tx}}{1 - e^{-t}}\, dt, \quad \Re(x) > 0, \tag{74}$$

$$H(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \frac{e^{-tx}}{1 + e^{-t}}\, dt, \quad \Re(x) > 0. \tag{74 bis}$$

Cherchons maintenant les deux intégrales numériques susdites; nous aurons tout d'abord, à l'aide de (72) et en posant dans (65) $y = 1$, cette formule intéressante:

$$H(x) = \log \sqrt{2\pi} - \log B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\Psi(x), \tag{75}$$

d'ou, en vertu de (73 bis), une représentation intégrale remarquable, et qui est, je crois, nouvelle:

Quant à $\Delta^{-1}\Psi(x)$, prenons comme point de départ l'identité

$$\Psi(x) = \log x - \left(\omega_1(x) - \frac{1}{2x}\right) - \frac{1}{2x};$$

nous aurons, en vertu de (73),

$$\Delta^{-1}\Psi(x) = \log \Gamma(x) - \frac{1}{2}\Psi(x) - \Phi(x) + \Im(x). \tag{75 bis}$$

Cela posé, mettons maintenant dans (75) $x = 1$, nous aurons

$$H(1) = \log \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{C}{2},$$

ou C désigne la constante d'Euler. Or, nous avons pour C la représentation intégrale bien connue [2])

[1]) Voir G. F. Meyer: Theorie der bestimmten Integrale, p. 136; Leipsic 1871.

[2]) G. F. Meyer: loc. cit. p. 152.

$$C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t \cdot e^t} \right) dt,$$

ce que donnera, en vertu de (74), cette intéressante formule intégrale:

$$\log \pi = \int_0^\infty \left(\frac{t+2}{e^t + 1} - \frac{1}{e^t} \right) \frac{dt}{t}, \tag{76}$$

qui est due à STERN [1]).

Revenons maintenant aux représentations intégrales (α), (β), (74) et (74 bis), puis mettons-y $t = -\log z$, le théorème fondamental [2]) de ma théorie des séries de factorielles montre que les quatre fonctions susdites sont développables en séries de factorielles convergentes toutes les quatre, pourvu que $\Re(x) > 0$, condition qui est *nécessaire* aussi. De plus, il est évident que ces quatre séries deviendront trés analogues; or, pour mettre en pleine lumière une telle analogie, nous avons à déduire de nouveau par un procédé rigoureux les séries de BINET pour $\omega(x)$ et $\omega_1(x)$.

Pour cela, prenons comme point de départ la série de puissances prise généralement comme définition des nombres de BERNOULLI [3]) savoir:

$$\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1} B_{2s-1}}{(2s)!} \cdot t^{2s-1}, \quad |t| < 2\pi, \tag{γ}$$

où les coefficients

$$B_1 \, B_3 \, B_5 \, B_7 \ldots$$

désignent les nombres de BERNOULLI; changeons maintenant dans (γ) le signe de t, nous aurons, en vertu de la règle de CAUCHY:

$$\left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{2} \right) = \sum_{s=0}^{s=\infty} A_{2s} \cdot t^{2s}, \quad |t| < 2\pi$$

où nous avons posé pour abréger:

$$A_{2n} = \frac{(-1)^n B_{2n+1}}{(2n+2)!} + (-1)^{n-1} \cdot \sum_{s=1}^{s=n} \frac{B_{2s-1}}{(2s)!} \cdot \frac{B_{2n-2s+1}}{(2n-2s+2)!}.$$

Or, appliquons cette formule numérique trés connue:

$$\sum_{s=1}^{s=n} \frac{B_{2s-1}}{(2s)!} \cdot \frac{B_{2n-2s+1}}{(2n-2s+2)!} = \frac{2n+3}{(2n+2)!} \cdot B_{2n+1},$$

nous aurons, en vertu de (γ), une nouvelle série de puissances, savoir:

[1]) Zur Theorie der Eulerschen Integrale, p. 4. Göttinger Studien 1847.

[2]) Annales de l'École Normale (3), t. 19, p. 421; 1902.

[3]) A. RADICKE: Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen; Halle 1880.

$$\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{1-e^{-t}}=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\mathfrak{A}_s}{(s+1)!}\cdot t^s,\ |t|<2\pi, \tag{δ}$$

où nous avons posé pour abréger:

$$\mathfrak{A}_0=\frac{B_1}{2},\quad \mathfrak{A}_{2s}=(-1)^{s-1}\cdot B_{2s+1},\quad \mathfrak{A}_{2s+1}=\frac{(-1)^s}{2}\cdot B_{2s+1} \tag{77}$$

En dernier lieu appliquons l'identité

$$\frac{1}{1+e^{-t}}=\frac{e^t}{e^t+1}=1-\frac{1}{e^t+1};$$

nous aurons évidemment:

$$\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1+e^{-t}}=\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}\right)-\left(\frac{1}{e^{2t}-1}-\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{e^t+1}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^{-t}+1},$$

ce qui donnera, en vertu de (74 bis), cette formule integrale:

$$H(x)=\omega_1(x)-\frac{1}{2}\beta(x)-\frac{1}{x}-\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^{2t}-1}-\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{e^t+1}\right)e^{-tx}dt,$$

ce qui montre clairement qu'il est beaucoup plus simple de considérer dans ce qui suit, au lieu de $H(x)$, la nouvelle fonction

$$\Xi(x)=\omega_1(x)-\frac{1}{2}\beta(x)-H(x),$$

d'où, en vertu de (75):

$$\Xi(x)=\log x-\frac{1}{2}\Psi(x)+\frac{1}{4}\left(\Psi\left(\frac{x}{2}\right)-\Psi\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)-\log\sqrt{2\pi}+\log B\left(\frac{x}{2},\frac{1}{2}\right);$$

appliquons maintenant la formule bien connue

$$\Psi(x)=\frac{1}{2}\left(\Psi\left(\frac{x}{2}\right)+\Psi\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+\log 2,$$

nous aurons pour $\Xi(x)$, à l'aide de la formule fondamentale de la fonction *beta*, cette expression beaucoup plus simple:

$$\Xi(x)=\log\sqrt{\pi}-\frac{1}{2}\cdot\Psi\left(\frac{x+1}{2}\right)-\log B\left(\frac{x+1}{2},\frac{1}{2}\right) \tag{78}$$

et cette expression intégrale:

$$\Xi(x)-\frac{1}{x}=\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^{2t}-1}-\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{e^t+1}\right)e^{-tx}dt,\quad \Re(x)>0. \tag{78 bis}$$

Cela posé, appliquons la définition des coefficients du tangent[1]), savoir

$$\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s T_{2s+1}}{(2s+1)!}\cdot t^{2s+1},\ |t|<\pi,$$

[1]) A. Radicke: Die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen.

nous aurons:

$$\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = 1 - \frac{2e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = 1 - \frac{2}{e^{2t}+1},$$

d'où, en vertu de (γ):

$$\frac{1}{e^{2t}-1} - \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{e^t+1} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\mathfrak{B}_s}{(s+1)!} \cdot t^s, \quad |t| < \pi, \tag{ε}$$

où nous avons posé pour abréger:

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{1}{4}, \quad \mathfrak{B}_{2s} = \frac{(-1)^s}{2^{2s+1}} \cdot T_{2s+1}, \quad \mathfrak{B}_{2s+1} = (-1)^s \cdot 2^{2s} \cdot B_{s+1}. \tag{79}$$

§ 21. Séries asymptotiques et séries de factorielles.

Introduisons maintenant dans les expressions intégrales obtenues pour les fonctions $\omega_1(x)$, $\omega(x)$, $\Phi(x)$ et $\Xi(x)$ les séries de puissances (γ), (δ) et (ε); un théorème général que j'ai démontré récemment[1]) donnera les quatre séries asymptotiques suivantes:

$$\omega(x) \sim \sum_{s=0}^{<\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s B_{2s+1}}{(2s+1)(2s+2)} \cdot \frac{1}{x^{2s+1}} \tag{80}$$

$$\omega_1(x) \sim \frac{1}{2x} + \sum_{s=1}^{\leqq\frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1} B_{2s-1}}{2s} \cdot \frac{1}{x^{2s}} \tag{81}$$

$$\Phi(x) \sim \sum_{s=1}^{s=n-1} \frac{\mathfrak{A}_s}{s+1} \cdot \frac{1}{x^{s+1}} \tag{82}$$

$$\Xi(x) \sim \frac{3}{4x} + \sum_{s=1}^{s=n-1} \frac{\mathfrak{B}_s}{s+1} \cdot \frac{1}{x^{s+1}}, \tag{83}$$

où le signe $\sim$ désigne une égalité asymptotique d'après la définition de M. Poincaré[2]).

Les quatre séries asymptotiques susdites sont applicables dans les points très éloignés situés à droite de l'axe des nombres purement imaginaires.

La série (81) est la série asymptotique célèbre, dite série de Stirling.

Or, ces quatre séries asymptotiques une fois trouvées, nous aurons ces développements en séries de factorielles:

[1]) Annales de l'École Normale (3), t. XXI. p. 452; 1904.

[2]) Acta Mathematica, t. 8, p 297; 1886.

$$\omega(x) = \frac{1}{12x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{-\frac{B_3}{3\cdot 4}\cdot C_s^{s-1} + \frac{B_5}{5\cdot 6}\cdot C_s^{s-3} - \frac{B_7}{7\cdot 8}\cdot C_s^{s-5} + \dots}{x(x+1)(x+2)\dots(x+s)} \tag{84}$$

$$\omega_1(x) = \frac{1}{2x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{B_1}{2}\cdot C_s^{s-1} - \frac{B_3}{4}\cdot C_s^{s-3} + \frac{B_5}{6}\cdot C_s^{s-5} - \dots}{x(x+1)(x+2)\dots(x+s)} \tag{85}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{12x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{\mathfrak{A}_s}{s+1}\cdot C_s^0 + \frac{\mathfrak{A}_{s-1}}{s}\cdot C_s^1 + \dots + \frac{\mathfrak{A}_1}{3}\cdot C_s^{s-1}}{x(x+1)(x+2)\dots(x+s)} \tag{86}$$

$$\Xi(x) = \frac{3}{4x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{\mathfrak{B}_s}{s+1}\cdot C_s^0 + \frac{\mathfrak{B}_{s-1}}{s}\cdot C_s^1 + \dots + \frac{\mathfrak{B}_1}{3}\cdot C_s^{s-1}}{x(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+s)}\,, \tag{87}$$

séries qui sont convergentes dans le demi-plan défini par l'inégalité: $\mathfrak{R}(x) > 0$.

La même méthode[1]) donnera encore les autres séries suivantes de factorielles:

$$\omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\frac{B_1}{1\cdot 2}\cdot C_{s+1}^{s} - \frac{B_3}{3\cdot 4}\cdot C_{s+1}^{s-2} + \frac{B_5}{5\cdot 6}\cdot C_{s+1}^{s-4}\dots}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+s+1)} \tag{88}$$

$$\omega_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot C_{s+1}^{s} + \frac{B_1}{2}\cdot C_{s+1}^{s-1} - \frac{B_3}{4}\cdot C_{s+1}^{s-3} + \dots}{(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+s+1)} \tag{89}$$

$$\Phi(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\frac{1}{12}\cdot C_{s+1}^{s} + \frac{\mathfrak{A}_1}{2}\cdot C_{s+1}^{s-1} + \dots + \frac{\mathfrak{A}_s}{s+1}\cdot C_{s+1}^{0}}{(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+s+1)} \tag{90}$$

$$\Xi(x) = \sum_{0=s}^{s=\infty} \frac{\frac{3}{4}\cdot C_{s+1}^{s} + \frac{\mathfrak{B}_1}{2}\cdot C_{s+1}^{s-1} + \dots + \frac{\mathfrak{B}_s}{s+1}\cdot C_{s+1}^{0}}{(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+s+1)}\,, \tag{91}$$

séries qui sont convergentes aussi pourvu que $\mathfrak{R}(x) > 0$.

On voit que les expressions pour les coefficients des séries de factorielles obtenues pour $\omega(x)$ et $\omega_1(x)$ sont formellement différentes de celles données par Binet et qui se trouvent par exemple dans le beau mémoire de M. Jensen sur la fonction gamma[2]). Or, en égalant ces expressions diverses, on trouvera une suite de relations intéressantes entre les nombres de Bernoulli et de Stirling, relations que j'ai étudiées sous une forme beaucoup plus générale dans un mémoire qui paraîtra prochainement dans les *Annali di Matematica*.

[1]) Mathematische Annalen (sous presse).

[2]) Nyt Tidsskrift for Matematik, t. II, B; 1891.

§ 22. Évaluation de $\Delta^{-1}\frac{1}{\Gamma(x+1)}$.

En terminant ces recherches nous avons encore à démontrer la formule suivante:

$$\Delta^{-1}\frac{1}{\Gamma(x+1)} = -\frac{eP(x)}{\Gamma(x)} + \mathfrak{J}(x), \tag{92}$$

où $P(x)$ désigne la fonction de M. PRYM, savoir:

$$P(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{s!}\cdot\frac{1}{x+s} = \frac{1}{e}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{x(x+1)\,(x+s)}.$$

Nous aurons en effet immédiatement:

$$P(x+1) = xP(x) - \frac{1}{e};$$

c'est-à-dire que $P(x)$ est intégrale particulière de l'équation aux différences finies

$$\Delta f(x) - (x-1)\,f(x) = -\frac{1}{e}.$$

Or, remarquons que $\Gamma(x)$ satisfait à l'équation homogène corresponqante, il doit être possible de déterminer une fonction $g(x)$ telle que

$$P(x) = g(x)\cdot\Gamma(x);$$

nous trouvons immédiatement:

$$\Delta g(x) = -\frac{1}{e\Gamma(x+1)},$$

ce qui nous conduira sans peine à (92).

Copenhague, le 8 mars 1904.

Table des Matières